

Tópicos de Geometria Complexa

Livro Texto

Brian Callander, Elizabeth Gasparim
Com apêndices por Severin Barmeier

11 de agosto de 2014

Introdução

Esta é uma versão preliminar do livro texto a ser usado no curso de pós-graduação de geometria complexa no departamento de matemática, IMECC, UNICAMP. Esta versão é baseada nas notas de aula apresentadas em 2012 e 2013.

Uma característica particular deste livro é o fato de abordar várias categorias de geometria: algébrica, complexa, simplética, e tórica, assim como relações entre elas.

O objetivo do texto é apresentar a conjectura da simetria homológica do espelho de Maxim Kontsevich, assim como suas implicações aos diamantes de Hodge das variedades.

Sumário

Introdução	i
1 Geometria Complexa	1
1.1 Variedades Complexas	1
2 Geometria Algébrica	6
2.1 Variedades Afins	6
2.2 Variedades Projetivas	9
2.3 Espectro de um Anel	10
3 Geometria Simplética	11
3.1 Variedades Simpléticas	11
4 Geometria Tórica	16
4.1 Fans	16
4.2 Variedades Tóricas	18
4.3 Politopos de Delzant	20
4.4 Variedades Tóricas Simpléticas	21
5 Fibrados Vetoriais	25
5.1 Construções	25
5.2 Grupo de Picard	31
5.3 GAGA	32
5.4 Formas Diferenciais	32
6 Feixes	33
6.1 Feixificação	33
6.2 Sequências Exatas	39
6.3 Feixes localmente livres	41
6.4 Feixes Coerentes	42
7 Divisores	43
7.1 Weil	43
7.2 Cartier	44

8 Cohomologias	45
8.1 Čech	45
8.2 Feixes	47
8.3 Dolbeaux	51
8.4 Relações entre as Cohomologias	53
8.5 Pic e Div	53
9 Classes Características	54
9.1 Classe de Euler	54
9.2 Classe de Chern	54
10 Teoria de Gauge	58
10.1 Fibrados Principais	58
10.2 Conexões	60
10.3 Curvatura	60
10.4 Transformação de Gauge	60
11 Deformações Infinitesimais	61
11.1 Famílias Diferenciáveis	61
11.2 Deformação infinitesimal	63
11.3 Dependência do Parâmetro	64
12 Simetria do Espelho	65
12.1 Diamantes de Hodge	65
12.2 Simetria do Espelho Homológica	66
A Teoria de Categorias	67
Bibliography	70
Índice	72
Lista de Símbolos	72

Lista de Figuras

1.1	Variedade complexa	3
4.1	Um cone e seu dual	18
4.2	Um cone e seu dual	18
4.3	O fan de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$	20
4.4	O pêndulo simples	22
4.5	O pêndulo esférico	23
5.1	Faixa de Möbius como fibrado vetorial	30
5.2	O fan para F_4	31

Capítulo 1

Geometria Complexa

[GH94]

1.1 Variedades Complexas

1.1.1 DEFINIÇÃO (Cauchy-Riemann). Dado um ponto $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, escrevemos

$$z_j = x_j + iy_j$$

para as partes reais e imaginárias. O espaço cotangente a um ponto em $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ (como variedade diferenciável real) é gerado por

$$\text{span}_{\mathbb{R}} \{ dx_i, dy_i \mid i = 1, \dots, n \}.$$

Também podemos trabalhar com a base complexa

$$dz_j := dx_j + idy_j,$$

$$d\bar{z}_j := dx_j - idy_j,$$

para a qual a base dual é

$$\partial_{z_j} := \frac{1}{2}(\partial_{x_j} - i\partial_{y_j}),$$

$$\partial_{\bar{z}_j} := \frac{1}{2}(\partial_{x_j} + i\partial_{y_j}).$$

Seja $f : U \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma aplicação de classe $C^\infty(U)$. A diferencial dela se escreve como

$$df_z = \sum_1^m \partial_{z_j} f dz_j + \sum_1^m \partial_{\bar{z}_j} f d\bar{z}_j,$$

e assim introduzimos a notação

$$\partial f := \sum_1^m \partial_{z_j} f dz_j$$

$$\bar{\partial} f := \sum_1^m \partial_{\bar{z}_j} f d\bar{z}_j.$$

Dizemos que f é holomorfa se ela satisfaz as equações de Cauchy-Riemann

$$\bar{\partial}f = 0.$$

1.1.2 Observação. Seja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação de classe C^1 e escreva-a como $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, onde $u, v: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ são as partes real e imaginárias, respectivamente. Então as equações de Cauchy-Riemann se reescrevem como

$$\partial_x u = \partial_y v \quad (1.1)$$

$$\partial_y u = -\partial_x v. \quad (1.2)$$

Isto segue do fato de que

$$\begin{aligned} 2\bar{\partial}f &= (\partial_x(u + iv) + i\partial_y(u + iv)) \\ &= \partial_x u + i\partial_x v + i\partial_y u - \partial_y v \\ &= (\partial_x u - \partial_y v) + i(\partial_y u + \partial_x v). \end{aligned}$$

1.1.3 Exercício. Generalize a Observação 1.1.2 para uma aplicação $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 .

1.1.4 DEFINIÇÃO. Uma aplicação $f: U \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ é analítica em $c \in U$ se ela se escreve numa vizinhança de c como série de Taylor. Mais precisamente, ela é analítica se existir uma vizinhança $V \subset U$ de c onde, para cada componente f_j de f , existem coeficientes $a_I \in \mathbb{C}$ (indexados por \mathbb{N}^m) tais que a série

$$f_j(z_1, \dots, z_m) = \sum_{I=(k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^m} a_I (z_1 - c)^{k_1} \cdots (z_m - c)^{k_m}$$

converge absolutamente e uniformemente para $f_j(z)$. Dizemos que f é analítica se ela for analítica em c para cada c no seu domínio U .

1.1.5 Proposição. Seja $f: U \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma aplicação de classe $C^\infty(U)$. Então as seguintes propriedades são equivalentes:

- f é holomorfa;
- f é analítica.

1.1.6 Observação. Se $n = m = 1$, uma aplicação $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa se, e só se, o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe.

1.1.7 Exemplo. As seguintes aplicações são de classe $C^\infty(\mathbb{C})$ mas não são holomorfas:

- $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \Re z.$

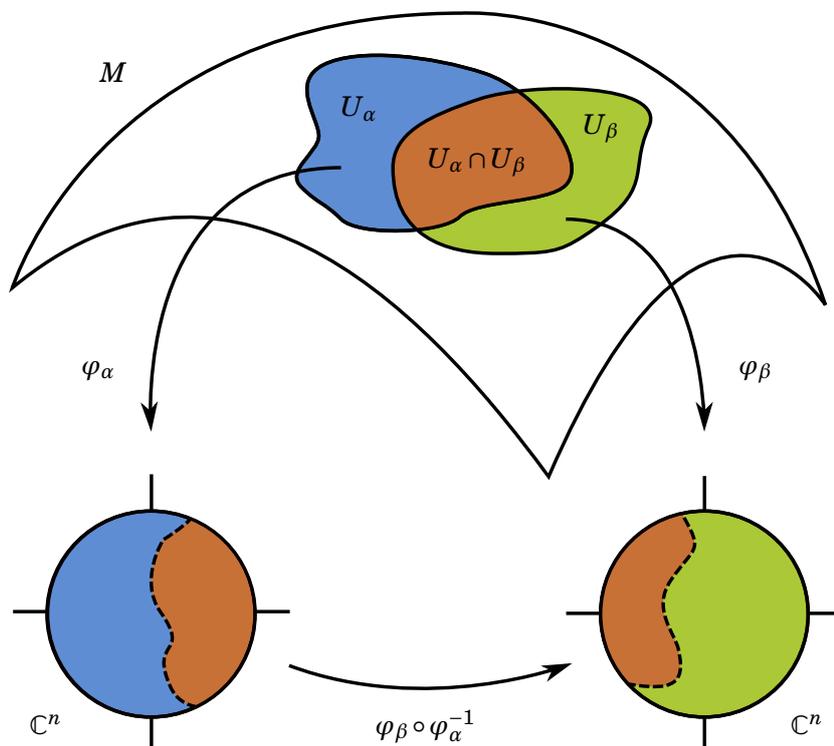


Figura 1.1: Uma variedade complexa M com cartas φ_α e φ_β .

- $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$.

1.1.8 DEFINIÇÃO. Uma *variedade complexa* de dimensão n é uma variedade lisa que admite uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ e cartas $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$ tais que as funções de transição $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ são holomorfas em $U_\alpha \cap U_\beta$ para cada α, β .

Uma *subvariedade analítica* de M é um subconjunto X que é localmente o conjunto de zeros de funções holomorfas. Mais explicitamente, para cada $p \in X$ existem uma vizinhança U de p e aplicações $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}(U)$ tais que $X \cap U = \{q \in U \mid f_i(q) = 0 \forall i = 1, \dots, m\}$. Uma *hipersuperfície analítica* é uma subvariedade analítica de codimensão 1.

1.1.9 DEFINIÇÃO. O *espaço projetivo complexo* \mathbb{P}^n é definido como o conjunto das retas passando pela origem no espaço \mathbb{C}^{n+1} . Mais rigorosamente, temos uma ação natural de \mathbb{C}^* em $(\mathbb{C}^{n+1})^*$ e definimos $\mathbb{P}^n := (\mathbb{C}^{n+1})^* / \sim$ com a topologia quociente.

Cada ponto $(x_0, \dots, x_n) \in (\mathbb{C}^n)^*$ define uma classe de equivalência $[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n$ chamado *coordenadas homogêneas*. Para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}^*$, as coordenadas homogêneas satisfazem $[\lambda x_0, \dots, \lambda x_n] = [x_0, \dots, x_n]$ por definição da equivalência. Definimos os abertos canônicos do espaço projetivo $U_i = \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_i \neq 0\}$.

As mudanças de coordenadas das cartas

$$\begin{aligned} \varphi: U_i &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ [x_0, \dots, x_n] &\mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \hat{1}_i, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \end{aligned}$$

(o chapéu indica que a coordenada falta) são

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}: \mathbb{C}^n \setminus \{z_i = 0\} &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ (z_1, \dots, z_n) &\mapsto \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{1}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right) \end{aligned}$$

que são holomorfas.

1.1.10 DEFINIÇÃO. Seja M^m e N^n duas variedades complexas e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação. Dizemos que f é holomorfa se existirem cartas $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}^m$ de M e $\psi: V \rightarrow \mathbb{C}^n$ de N tais que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_U$ é (bem-definida e) holomorfa. Denotamos por

$$\mathcal{O}_M(U) := \{ f: U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é holomorfa } \}$$

o anel de aplicações holomorfas em M . Caso não seja ambíguo, escrevemos só $\mathcal{O}(U)$. Para distinguir o caso holomorfo aqui do caso algébrico no Capítulo 2, escrevemos $\mathcal{O}_{\text{hol}}(U) := \mathcal{O}_M(U)$.

1.1.11 Exercício. Mostre que a definição de aplicação holomorfa não depende da escolha de cartas.

1.1.12 Teorema ([Ahl78, Section 3.2]). *Sejam $f, g: \Omega \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ duas aplicações holomorfas definidas na região $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Se o conjunto $\{x \in \Omega \mid f(x) = g(x)\}$ possui um ponto de acumulação, então $f \equiv g$.*

1.1.13 Proposição. *Uma aplicação holomorfa $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é constante ou aberta.*

1.1.14 Proposição. *Uma aplicação holomorfa $f: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $n > 1$, é constante.*

1.1.15 Proposição. [Cal13] *Uma aplicação $f: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^1$ de classe C^1 , $n > 1$, não tem pontos regulares.*

1.1.16 Proposição. *Uma aplicação holomorfa $f: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^1$, $n > 1$, é constante.*

1.1.17 DEFINIÇÃO. Existem vários fibrados tangentes diferentes sobre uma variedade complexa M de dimensão complexa n . Em primeiro lugar temos TM , o fibrado tangente real de posto $2n$. A fibra sobre o ponto $z = z_1, \dots, z_n$ é dada por

$$T_z M = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i} \mid i = 1, \dots, n \right\},$$

as derivações \mathbb{R} -lineares. Podemos complexificar esse fibrado para obter $T_{\mathbb{C}}M$, o *fibrado tangente complexo* de posto complexo $2n$. As fibras dele são dadas por as derivações \mathbb{C} -lineares

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{C},z}M &= \text{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i} \mid i = 1, \dots, n \right\} \\ &= \text{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \mid i = 1, \dots, n \right\}, \end{aligned}$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial z_i} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y_i} \right).$$

Temos dois subfibrados naturais: o *fibrado tangente holomorfo* $T_{\partial}M$ formado pelas derivações que se anulam nas aplicações antiholomorfas; e o *fibrado tangente antiholomorfo* $T^{0,1}M$ formado pelas derivações que se anulam nas aplicações holomorfas. As fibras deles são dadas por

$$T_{\partial,z}M = \text{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_i} \mid i = 1, \dots, n \right\} \quad \text{e} \quad T_z^{0,1}M = \text{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \mid i = 1, \dots, n \right\},$$

respectivamente.

1.1.18 Teorema (Hartog [GH94]). *Qualquer aplicação holomorfa $f: \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ se estende de maneira única para uma aplicação holomorfa $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Mais concisamente, $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$.*

Capítulo 2

Geometria Algébrica

[Har77]

2.1 Variedades Afins

2.1.1 DEFINIÇÃO. Seja \mathbb{k} um corpo algebricamente fechado e defina $\mathbb{A}^n := \mathbb{k}^n$. Para X um subconjunto de \mathbb{A}^n e um ideal I de $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, definimos

$$\mathcal{V}(I) := \{p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) = 0 \forall f \in I\}.$$
$$\mathcal{I}(X) := \{f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \mid f(p) = 0 \forall p \in X\}.$$

Um conjunto $X \subset \mathbb{A}^n$ é chamado de *conjunto algébrico afim* se X é da forma $X = \mathcal{V}(I)$ para algum ideal I de $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$.

Definimos a *topologia de Zariski* em \mathbb{A}^n como a topologia cujos fechados são os conjuntos algébricos afins.

2.1.2 Observação. Seja $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ um número finito de polinômios. Se um ponto $p \in \mathbb{A}^n$ satisfaz $f_i(p) = 0$ para cada $i = 1, \dots, m$, então o ponto p é um zero para cada elemento do ideal $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ gerado por f_1, \dots, f_m ; em outras palavras $p \in \mathcal{V}(\langle f_1, \dots, f_m \rangle)$. Além disso, cada ideal em $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ tem um número finito de geradores. Por isso, as vezes vamos usar o abuso de notação $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_m)$ em vez de $\mathcal{V}(\langle f_1, \dots, f_m \rangle)$.

2.1.3 Observação. Quase sempre vamos usar o corpo $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

2.1.4 Exercício. Mostre as seguintes afirmações.

1. Se $I_1 \subset I_2$, então $\mathcal{V}(I_2) \subset \mathcal{V}(I_1)$.
2. Se $V_1 \subset V_2$, então $\mathcal{I}(V_2) \subset \mathcal{I}(V_1)$.
3. $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) = X$.
4. $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$. Isso é Hilbert's Nullstellensatz.

2.1.5 Teorema. *Existe uma bijeção*

$$\begin{aligned} \{\text{conjuntos algébricos afins de } \mathbb{A}^n\} &\rightarrow \{\text{ideais radicais de } \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]\} \\ X &\mapsto \mathcal{I}(X). \end{aligned}$$

2.1.6 Exercício. Mostre que a topologia de Zariski definida acima é de fato uma topologia.

2.1.7 Exercício. Mostre que a topologia Euclidiana é estritamente mais fina que a topologia de Zariski.

2.1.8 Exemplo. Os conjuntos fechados de \mathbb{A} (além de \mathbb{A}) são os conjuntos finitos. De fato, um polinômio $f \in \mathbb{k}[x]$ tem um número finito de raízes, e uniões finitas de conjuntos finitos também têm um número finito de pontos.

2.1.9 DEFINIÇÃO. Um espaço topológico X qualquer é dito *redutível* se existirem subconjuntos próprios fechados não nulos X_1, X_2 tais que $X = X_1 \cup X_2$. Caso contrário, X é dito *irredutível*.

2.1.10 Observação. Se também exigimos que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, obtemos a definição de (des)conexidade.

2.1.11 Exemplo. O conjunto algébrico X correspondente ao polinômio $p = xy \in \mathbb{R}^2[x, y]$ consiste dos eixos coordenados. Esse conjunto é redutível pois $X = \mathcal{V}(xy) = \mathcal{V}(x) \cup \mathcal{V}(y)$. Note também que X não é uma variedade diferenciável na origem.

2.1.12 Exercício. \mathbb{A}^1 irredutível pois seus conjuntos fechados são finitos e ele é infinito.

2.1.13 DEFINIÇÃO. Uma *variedade afim* de \mathbb{A}^n é um subconjunto algébrico que é irredutível.

2.1.14 Lema. *Um conjunto algébrico X é irredutível se e somente se $\mathcal{I}(X)$ é um ideal primo.*

2.1.15 Exercício. \mathbb{A}^n é irredutível pois $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$, que é um ideal primo.

2.1.16 Exemplo. O círculo é uma variedade afim definida em \mathbb{R}^2 pelo polinômio $p = x^2 + y^2 - 1$. Isto é, $\mathbb{S}^1 = \mathcal{V}(p)$. Note que a variedade definida por p depende do espaço ambiente, pois em \mathbb{R}^3 a variedade afim definida por p é o cilindro.

2.1.17 DEFINIÇÃO. Dois polinômios $f, g \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ definem a mesma aplicação $X \rightarrow \mathbb{k}$ se $f - g \in \mathcal{I}(X)$. Então definimos as *funções regulares* como sendo elementos do quociente

$$\mathbb{k}[X] := \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] / \mathcal{I}(X),$$

que se chama o *anel de coordenadas de X* . Note que as projeções canônicas (monômios de grau 1) $x_i : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{k}$ são regulares.

Essa definição se estende às aplicações entre duas variedades. Mais precisamente, uma *função regular entre variedades afins* $X \subset \mathbb{A}^m$ e $Y \subset \mathbb{A}^n$ é uma aplicação $F: X \rightarrow Y$ tal que $f_i := y_i \circ F \in \mathbb{k}[X]$ para cada projeção canônica $y_i \in \mathbb{k}[Y]$.

Dois variedades afins X, Y são ditas *isomorfas* se existirem funções regulares $F: X \rightarrow Y, G: Y \rightarrow X$ tais que $F \circ G = \text{id}$ e $G \circ F = \text{id}$.

2.1.18 Exemplo. O toro complexo $\mathbb{T}^n := (\mathbb{C}^*)^n$ é uma variedade afim pois é isomorfo à variedade afim $X := \mathcal{V}(z_1 \cdots z_{n+1} - 1) \subset \mathbb{C}^{n+1}$. A aplicação

$$F: \mathbb{T}^n \rightarrow X \\ (t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1, \dots, t_n, (t_1 \cdots t_n)^{-1})$$

é uma função regular pois $(t_1 \cdots t_n)^{-1} \equiv 1$ como um elemento do $\mathbb{C}[X]$. A inversa é dada por

$$G: X \rightarrow \mathbb{T}^n \\ (z_1, \dots, z_{n+1}) \mapsto (z_1, \dots, z_n),$$

que é claramente uma função regular. É fácil verificar que $F \circ G = \text{id}$ e $G \circ F = \text{id}$.

2.1.19 DEFINIÇÃO. Se X for uma variedade afim irredutível, o anel de coordenadas $\mathbb{k}[X]$ é domínio de integridade e podemos construir o corpo de frações

$$\mathbb{k}(X) := \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in \mathbb{k}[X] \text{ e } g \neq 0 \right\},$$

chamado de *corpo de funções racionais*. Um elemento desse corpo é chamado de *função racional*.

Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ funções racionais, onde X é irredutível. Dizemos que elas são equivalentes se existe um aberto Zariski $A \subset X$ tal que $f|_A = g|_A$.

Uma função racional $f: X \rightarrow Y$ entre variedades irredutíveis é dita *birracional* se existir uma função racional $g: Y \rightarrow X$ e abertos Zariski $A \subset X, B \subset Y$ tais que $f|_A \circ g|_B = \text{id}$.

2.1.20 Observação. A definição acima é uma caracterização de algumas funções na geometria algébrica. Mas no caso $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, as funções racionais são as funções meromorfas; ou seja, localmente um quociente de aplicações holomorfas. Isso é a caracterização dessas funções na geometria complexa.

2.1.21 Exemplo. A aplicação

$$g: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) \mapsto \frac{p_1(x, y)}{p_2(x, y)},$$

onde p_1 e p_2 são polinômios sem fatores comuns, é uma função racional. Pelo teorema fundamental da álgebra, se $p_2(x, y)$ não é constante, então ele tem raízes. Logo $g(x, y) = \infty$ para algum $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Na verdade g é bem-definida como função regular só para o aberto Zariski $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{V}(p_2)$.

2.2 Variedades Projetivas

2.2.1 DEFINIÇÃO. O espaço projetivo $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n$ sobre o corpo \mathbb{k} é definido como o conjunto dos subespaços de dimensão 1 do espaço \mathbb{k}^{n+1} . Mais rigorosamente, temos uma ação natural de \mathbb{k}^* em $(\mathbb{k}^{n+1})^*$ e definimos $\mathbb{P}^n := (\mathbb{k}^{n+1})^* / \sim$. Escrevemos $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ ou $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ para os espaços projetivos sobre \mathbb{R} ou \mathbb{C} , respectivamente.

Cada ponto $(x_0, \dots, x_n) \in (\mathbb{k}^n)^*$ define uma classe de equivalência $[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n$ chamada de *coordenada homogênea*. Para qualquer $\lambda \in \mathbb{k}^*$, as coordenadas homogêneas satisfazem $[\lambda x_0, \dots, \lambda x_n] = [x_0, \dots, x_n]$ por definição da equivalência. Definimos as *cartas afins* em \mathbb{P}^n como $U_i := \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_i \neq 0\}$. Essas cartas são isomorfos ao espaço afim \mathbb{C}^n e as mudanças de coordenadas são aplicações regulares.

2.2.2 Observação. Queremos definir as variedades projetivas como sendo os zeros de polinômios. O problema é que um polinômio não é bem-definido como uma aplicação em \mathbb{P}^n . Por exemplo, a aplicação $p(x, y) := x - y^2$ satisfaz $p(1, 1) = 0$ e $p(2, 2) = -2$, mas $[2, 2] = [1, 1]$ em \mathbb{P}^1 . Para resolver esse problema, nós consideramos somente polinômios que satisfazem $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$ para algum $d \in \mathbb{N}$. Tais polinômios se chamam *polinômios homogêneos* de grau d , e os seus zeros são pontos bem-definidos em \mathbb{P}^n .

2.2.3 DEFINIÇÃO. Um ideal I gerado por polinômios homogêneos não todos nulos é chamado um *ideal homogêneo*.

2.2.4 DEFINIÇÃO. Dado um ideal homogêneo I de $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ e um conjunto $X \subset \mathbb{P}^n$, definimos

$$\mathcal{V}(I) := \{p \in \mathbb{P}^n \mid f(p) = 0 \forall f \in I\},$$

$$\mathcal{I}(X) := \{f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \mid f \text{ é homogêneo e } f(p) = 0 \forall p \in X\}.$$

Um conjunto $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma *variedade projetiva* se X é da forma $X = \mathcal{V}(I)$ para algum ideal homogêneo I .

A topologia de Zariski em \mathbb{P}^n é definida como no caso afim: os fechados são as variedades projetivas.

2.2.5 Exercício. Mostre que \mathbb{T}^n é um aberto Zariski de \mathbb{P}^n .

2.2.6 Exercício. Sejam $f_0, \dots, f_m \in \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]$ polinômios homogêneos tais que $\deg f_i = \deg f_j$ para qualquer i, j e seja $X \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva tal que $X \cap \mathcal{V}(f_0, \dots, f_m) = \emptyset$. Mostre que

$$F: V \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^m$$

$$a \mapsto [f_0(a), \dots, f_m(a)]$$

é bem-definido e que $F(V)$ é uma variedade projetiva.

2.2.7 DEFINIÇÃO. O anel de coordenadas é definido como no caso afim:

$$\mathbb{k}[X] := \{f \in \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n] \mid f \text{ é homogêneo}\} / \mathcal{I}(X)$$

é o anel de *funções regulares* em X . O *corpo de funções racionais* também:

$$\mathbb{k}(X) := \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in \mathbb{k}[X] \text{ e } \deg f = \deg g \neq \infty \right\}$$

é o corpo de *funções racionais* em X .

Uma variedade projetiva diz-se *racional* se existir uma função birracional $f: X \rightarrow \mathbb{P}^n$ para algum n .

2.2.8 *Exemplo.* Considere $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ com coordenadas homogêneas $[x, y, z, w]$. Então a variedade $\mathcal{V}(x)$ é isomorfa a $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$.

2.3 Espectro de um Anel

2.3.1 DEFINIÇÃO. O *espectro* de um anel R é definido como

$$\text{Spec}(R) := \{ \mathfrak{p} \subset R \mid \mathfrak{p} \text{ é um ideal primo próprio} \}$$

o conjunto dos ideais primos próprios de R . Os *conjunto algébricos* são os conjuntos da forma

$$\mathcal{V}(I) := \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec} R \mid I \subset \mathfrak{p} \}$$

para $I \subset R$ um subconjunto qualquer. Analogamente ao caso de variedade afins, definimos a *topologia de Zariski* de $\text{Spec} R$ como a topologia cujos fechados são os conjuntos algébricos.

Capítulo 3

Geometria Simplética

A geometria simplética é a geometria das variedades (lisas) equipadas com uma 2-forma fechada e não degenerada. A geometria Hamiltoniana é a geometria das variedades simpléticas equipadas com uma aplicação momento.

[Can08] [CAL03] [MS95] [GS82]

3.1 Variedades Simpléticas

3.1.1 DEFINIÇÃO. Uma *variedade simplética* é uma variedade lisa M equipada com uma 2-forma fechada não degenerada ω .

3.1.2 Exemplo. O exemplo canônico de uma variedade simplética é $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, onde

$$\omega_0 := \sum_1^n dx_i \wedge dy_i$$

com coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$.

3.1.3 Teorema (Darboux). *Seja (M, ω) uma variedade simplética de dimensão $2n$ e $p \in M$. Então existe um sistema de coordenadas locais $(U, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ tal que $\omega = \omega_0$ em U . Esse sistema é chamado de coordenadas de Darboux.*

3.1.4 Teorema. *Qualquer variedade riemanniana complexa (M, J, g) admite uma estrutura simplética definida por $\omega(X, Y) = g(X, JY)$.*

3.1.5 Exemplo. Continuando o Exemplo 3.1.2, podemos identificar \mathbb{C}^n com \mathbb{R}^{2n}

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (z_1, \dots, z_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n), \end{aligned}$$

onde $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$. O pullback da forma simplética ω_0 em \mathbb{R}^{2n} fornece \mathbb{C}^n com uma estrutura simplética, que também denotamos por ω_0 . Nas coordenadas complexas, obtemos a seguinte expressão:

$$\omega_0 = \frac{i}{2} \sum_1^n dz_i \wedge d\bar{z}_i.$$

Além disso, a forma simplética é compatível com a estrutura complexa usual J de \mathbb{C}^n e a métrica euclidiana g no sentido que $\omega_0(X, Y) = g(X, JY)$.

3.1.6 Exemplo. O espaço projetivo $\mathbb{P}^n := \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ também admite uma estrutura simplética. Com a estrutura complexa usual de \mathbb{P}^n , podemos usar a métrica de Fubini-Study g para definir uma forma simplética $\omega(X, Y) := g(X, JY)$.

A métrica de Fubini-Study pode ser definida por via do \mathbb{S}^1 -fibrado

$$\begin{aligned} p: \mathbb{S}^{2n+1} &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ z &\mapsto [z] \end{aligned}$$

por identificação do espaço horizontal $\ker p_*$ com o espaço tangente de \mathbb{P}^n . Assim restringe-se a métrica redonda g_\circ ao espaço horizontal e induz-se a uma métrica g em \mathbb{P}^n ; isto é, $g_\circ(X, Y) = g(p_*X, p_*Y)$ para quaisquer campos horizontais X, Y .

Para mostrar que essa construção realmente define uma métrica, devemos mostrar que a ação $\varphi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \text{Diff}\mathbb{S}^{2n+1}$

1. age em \mathbb{S}^{2n+1} por isometrias;
2. satisfaz $p \circ \varphi_\lambda = p$ para qualquer elemento $\lambda \in \mathbb{S}^1$; e
3. é transitiva em cada fibra.

Item **1** é claro pois $g_\circ(\lambda X, \lambda Y) = \lambda \bar{\lambda} g_\circ(X, Y) = g_\circ(X, Y)$ para $\lambda \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^1$. A relação de equivalência projetiva em \mathbb{C}^{2n+1} garante que Item **2** é satisfeito. A fibra sobre $[z_0, \dots, z_n]$ é dada por $\{\lambda(z_0, \dots, z_n) \mid \lambda \in \mathbb{C}^1\} = \{\lambda(z_0, \dots, z_n) \mid \lambda \in \mathbb{S}^1\}$, a órbita de $(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{S}^1$, mostrando que Item **3** é satisfeito.

3.1.7 Proposição. *Seja ω uma forma bilinear antissimétrica no espaço vetorial V . Então existe uma base $u_1, \dots, u_k, e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ com respeito à qual ω tem a matriz*

$$\begin{pmatrix} 0_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{id}_n \\ 0 & -\text{id}_n & 0 \end{pmatrix} = \sum_1^n e^j \wedge f^j, \quad (3.1)$$

onde $\{u^i, e^j, f^j \mid i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, n\}\}$ é a base dual. Em particular, se ω for não degenerada, a dimensão de V é par.

3.1.8 Proposição. *A esfera \mathbb{S}^n admite uma estrutura simplética só para $n = 2$.*

Demonstração. Pela Proposição **3.1.7**, podemos excluir todas as esferas de dimensão ímpar.

Seja $n = 2k$ para $k > 1$ e suponha (para obter uma contradição) que ω seja uma forma simplética em \mathbb{S}^{2k} . Se ω^k for exata, $d\alpha = \omega^k$, então temos pelo teorema de Stokes que

$$0 \neq \int_{\mathbb{S}^{2k}} \omega^k = \int_{\partial \mathbb{S}^{2k}} \alpha = 0,$$

que não é possível. Portanto, ω^k não pode ser exata e daí que defina uma classe não zero $0 \neq [\omega^k] \in H^n(\mathbb{S}^{2k}, \mathbb{R})$. Segue que $0 \neq [\omega] \in H^2(\mathbb{S}^{2k}, \mathbb{R})$, considerando o produto de cohomologia ou por calculo direto: $\omega^k = (d\alpha)^k = d(\alpha \wedge (d\alpha)^{k-1})$. Mas

$$H_{dR}^2(\mathbb{S}^{2k}; \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{if } k = 1 \\ 0 & \text{if } k > 1 \end{cases},$$

que é uma contradição se $k > 1$.

Uma estrutura simplética em \mathbb{S}^2 é dada pelo pullback da forma simplética de \mathbb{P}^1 via um difeomorfismo $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$. \square

3.1.9 Observação. Apesar de que podemos definir uma estrutura quasi-complexa em \mathbb{S}^6 , é uma questão aberta se exista uma estrutura complexa.

3.1.10 Lema. *Uma 2-forma fechada ω fornece a variedade M^{2m} com uma estrutura simplética se e somente $\omega^{\wedge m}$ é uma forma volume em M .*

Demonstração. Pela Proposição 3.1.7, uma 2-forma ω pode ser escrita localmente como

$$\omega = \sum_1^n e^i \wedge f^i,$$

para algum $n \leq m$. Se ω for não degenerada, então $n = m$ e o m -ésimo produto exterior é dado por

$$\omega^{\wedge m} = m! \bigwedge_{i=1}^m e^i \wedge f^i \neq 0$$

onde usamos que $(e^i \wedge f^i) \wedge (e^j \wedge f^j) = (e^j \wedge f^j) \wedge (e^i \wedge f^i)$. Portanto, $\omega^{\wedge m}$ é uma forma volume.

Reciprocamente, se ω for degenerada, então $n < m$ e o m -ésimo produto exterior é zero e daí que $\omega^{\wedge m}$ não é uma forma volume. \square

3.1.11 Observação. Como a existência de uma forma volume implica a existência de uma orientação, sabemos que uma variedade não orientável – a faixa de Möbius, por exemplo – não admite uma estrutura simplética.

3.1.12 Teorema. *Dada qualquer variedade diferenciável X , a variedade cotangente T^*X é uma variedade simplética.*

Demonstração. Seja $p = (x, \xi) \in T^*X$ e defina a 1-forma tautológica $\alpha_p := (d\pi^*\xi)_p$, onde $\pi: T^*X \rightarrow X$ é a projeção natural do fibrado cotangente. Agora defina a 2-forma simplética canônica $\omega := -d\alpha$.

Mostraremos que isso é de fato uma forma simplética por escrevê-la em um sistema de coordenadas local $(\pi^{-1}(U), x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$. Primeiro, $\alpha_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \xi_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \xi_i(x)$, para que

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i \tag{3.2}$$

em $\pi^{-1}(U)$. Segue que

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i, \quad (3.3)$$

que é ω_0 do Exemplo 3.1.2. \square

3.1.13 DEFINIÇÃO. Seja (M, ω) uma variedade simplética. Dizemos que uma subvariedade $i: L \rightarrow M$ é uma *subvariedade Lagrangiana* se $i^*\omega \equiv 0$ e $\dim L = \frac{1}{2} \dim M$.

3.1.14 Teorema. Seja μ uma 1-forma na variedade X . Então

$$X_\mu := \{(x, \mu_x) \mid x \in X, \mu_x \in T_x^*X\}$$

é uma subvariedade Lagrangiana de T^*X se e somente se μ é uma forma fechada.

Demonstração. Temos que X_μ é uma subvariedade mergulhada em T^*X pois é a imagem da seção μ . Seja $s_\mu: X \rightarrow T^*X$ esse mergulho, i.e. a 1-forma μ considerada como uma aplicação. Então

$$\begin{aligned} (s_\mu^* \alpha)_x &= (ds_\mu)_x^* \alpha_p \\ &= (ds_\mu)_x^* (d\pi)_p^* \mu_x \\ &= (\pi s)_x^* \mu_x \\ &= \mu_x. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Seja $\tau: X \rightarrow X_\mu$ a difeomorfismo que comuta o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s_\mu} & T^*X \\ \tau \downarrow & & \nearrow i \\ X_\mu & & \end{array}$$

onde $i: X_\mu \rightarrow T^*X$ é a inclusão. Por definição, X_μ é uma subvariedade Lagrangiana se e somente se $i^*d\alpha = 0$, que acontece se e somente se $\tau^*i^*d\alpha = 0$ pois τ é um difeomorfismo. Agora, $\tau^*i^*d\alpha = (i\tau)^*d\alpha = s_\mu^*d\alpha = d(s_\mu^*\alpha) = d\mu$, onde a última igualdade segue por eq. (3.4). \square

3.1.15 Teorema. Seja Z uma subvariedade de X . Então o fibrado conormal N^*Z é uma subvariedade Lagrangiana de T^*X .

Demonstração. Mostraremos que a inclusão $i: N^*Z \rightarrow T^*X$ satisfaz $i^*\omega = 0$. Basta mostrar que $i^*\alpha = 0$. Seja (U, x_1, \dots, x_n) um sistema de coordenadas local em volta de $x \in Z$ adaptado a Z , i.e. $x_{k+1}, \dots, x_n = 0$ em Z . Então, $N^*Z \cap T^*U$

é definida por $x_{k+1} = \dots = x_n = 0 = \xi_1 = \dots = \xi_k$. Combinando isso com eq. (3.2), vemos que $\alpha = \sum_{i>k} \xi_i dx_i$, é segue que

$$\begin{aligned} i^* \alpha_p &= \alpha|_{T_p(N^*Z)} \\ &= \sum_{i>k} \xi_i dx_i|_{\langle \frac{\partial}{\partial x_j} | j \leq k \rangle} \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde $\langle \frac{\partial}{\partial x_j} | j \leq k \rangle$ é o subespaço gerado pelos elementos $\frac{\partial}{\partial x_j}$ para $j \leq k$. \square

Capítulo 4

Geometria Tórica

4.1 Fans

4.1.1 DEFINIÇÃO. Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é um *cone* se existirem vetores $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$C = \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \mid a_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, k\}.$$

Os vetores v_1, \dots, v_k são os *geradores* do cone.

O cone é chamado de *racional* se os geradores pertencem ao \mathbb{Z}^n , e de *suave* se eles formam uma base de \mathbb{Z}^n . A *dimensão do cone* é $\dim_{\mathbb{R}} C$.

4.1.2 DEFINIÇÃO. O *dual* C^\vee de um cone $C \subset \mathbb{R}^n$ é

$$C^\vee := \{f \in \mathbb{R}^\vee \mid \forall x \in C, f(x) \geq 0\}.$$

Um *hiperplano de suporte* para um cone C é um hiperplano H da forma

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\},$$

onde $f \in C^\vee$.

Uma *face* de um cone C é um subconjunto da forma $H \cap C$, onde H é um hiperplano de suporte para C . No caso que $f \neq 0$, a face é chamada de *face própria*.

4.1.3 *Exercício.* Mostre que uma face de um cone também é um cone, que um cone tem um número finito de faces só, e que a interseção de faces também é uma face.

4.1.4 **Teorema.** *O cone dual de um cone racional é racional.*

4.1.5 **Lema.** *A interseção $C^\vee \cap (\mathbb{Z}^n)^\vee$ é um semigrupo gerado por um número finito de elementos.*

4.1.6 DEFINIÇÃO. Denotamos por S_C o semigrupo $C^\vee \cap (\mathbb{Z}^n)^\vee$.

4.1.7 DEFINIÇÃO. Dado um cone racional C , temos a variedade afim $X_C := \text{Spec}_m \mathbb{C}[S_C]$.

4.1.8 Teorema. *Dado um cone racional C , a variedade X_C é uma variedade tórica. Se o cone racional C está contido em um cone racional C' , então existe uma função regular equivariante*

$$\varphi: \text{Spec}_m \mathbb{C}[S_C] \rightarrow \text{Spec}_m \mathbb{C}[S_{C'}].$$

Se, além do mais, C for uma face de C' , então φ é injetiva e aberta para a topologia de Zariski.

4.1.9 DEFINIÇÃO. Um fan em \mathbb{R}^n é uma família \mathcal{F} de cones racionais fortemente convexos em \mathbb{R}^n tal que

1. para uma face F de um cone $C \in \mathcal{F}$, também temos que $F \in \mathcal{F}$;
2. dados dois cones $C, C' \in \mathcal{F}$, a interseção $C \cap C'$ é uma face dos ambos.

O fan é chamado de *suave* se todos seus cones são suaves, e de *racional* se todos seus cones são racionais. O de \mathcal{F} é a união $\bigcup_{C \in \mathcal{F}} C$ de todos os cones de \mathcal{F} , e o fan é chamado de *se* o suporte for o espaço inteiro.

4.1.10 Teorema. *Dado um fan \mathcal{F} , temos uma variedade tórica $X_{\mathcal{F}}$ definida por identificar X_C com sua imagem em $X_{C'}$ (via o morfismo dado em Teorema 4.1.8) quando C é uma face de C' .*

4.1.11 Proposição. *Se \mathcal{F} for um fan completo em \mathbb{R}^n , então $X_{\mathcal{F}}$ é uma compactificação do toro \mathbb{T}^n .*

4.1.12 Teorema. *[Clasificação de Variedades Tóricas] Dada uma variedade tórica normal X , existe um fan \mathcal{F} em \mathbb{R}^n tal que $X \cong X_{\mathcal{F}}$. O fan \mathcal{F} é único a menos de uma transformação de $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$.*

4.1.13 *Exemplo.* Seja σ o cone contido nos raios $\{(0,1), (2,1)\}$ no Figura 4.1. Então o cone dual σ^\vee é o cone contido nos raios $\{(1,0), (-1,2)\}$, que tem geradores $A = (1,0)$, $B = (-1,2)$, e $C = (0,1)$. A relação linear entre os geradores de σ^\vee é $A + B = 2C$. Com $X := e^A$, $Y := e^B$, e $Z := e^C$, temos a variedade tórica $\mathcal{V}(XY - Z^2)$.

4.1.14 *Exemplo.* Seja σ o cone contido nos raios $\{(0,1), (3,-1)\}$ no Figura 4.2. Então o cone dual σ^\vee é o cone contido nos raios $\{(1,0), (1,3)\}$, que tem geradores $A = (1,0)$, $B = (1,1)$, $C = (1,2)$, e $D = (1,3)$. As relação lineares entre os geradores de σ^\vee são $A + B = C + D$ e $A - B = C - D$. Com $W := e^A$, $X := e^B$, $Y := e^C$, e $Z := e^D$ temos a variedade tórica $\mathcal{V}(WX - YZ, WZ - XY)$.

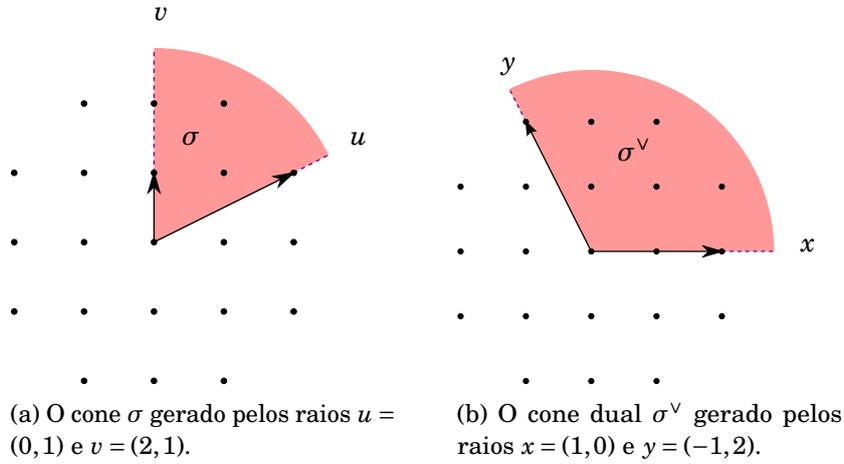


Figura 4.1: Um cone e seu dual.

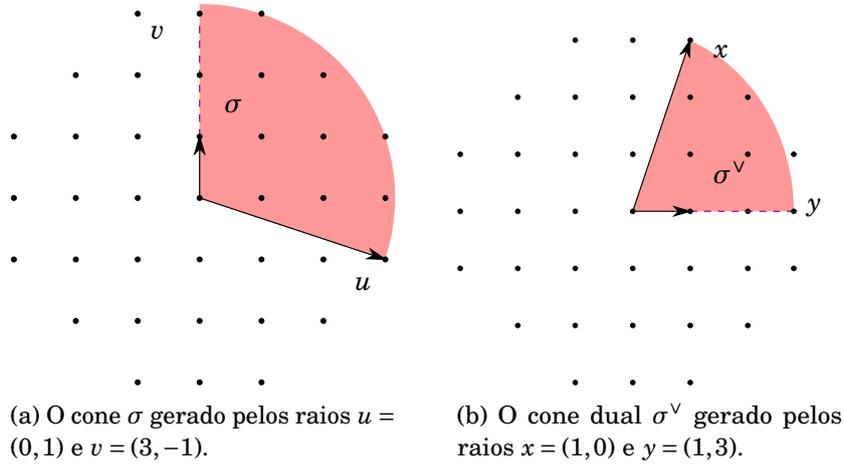


Figura 4.2: Um cone e seu dual.

4.2 Variedades Tóricas

4.2.1 DEFINIÇÃO. O toro algébrico é $(\mathbb{C}^*)^n$, que é homotopicamente equivalente ao toro real $\prod_1^n \mathbb{S}^1$.

4.2.2 DEFINIÇÃO. Um conjunto $X \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é chamado de variedade quasi-projetiva se X é um aberto de Zariski (não vazio) em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

4.2.3 Exemplo. Variedades afins e projetivas são variedades quasi-projetivas.

4.2.4 DEFINIÇÃO (Ação do Toro em Si Mesmo). A ação natural do toro $\mathbb{T}^n := (\mathbb{C}^*)^n$ em si mesmo é dado por

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n &\rightarrow \mathbb{T}^n \\ ((t_1, \dots, t_n), (s_1, \dots, s_n)) &\rightarrow (t_1 s_1, \dots, t_n s_n). \end{aligned}$$

4.2.5 DEFINIÇÃO. Uma *variedade tórica* é uma variedade quasi-projetiva irredutível X que contém um toro $\mathbb{T}^n \cong (\mathbb{C}^*)^n$ algebricamente mergulhado tal que

1. a ação do toro em si mesmo se estende a uma ação em X ; e
2. $\overline{\mathbb{T}^n} = X$; ou seja, o toro é denso em X (na topologia de Zariski).

Duas variedades tóricas são equivalentes se existir um isomorfismo equivariante entre eles.

4.2.6 DEFINIÇÃO. Um *caráter* de um grupo abeliano G é um homomorfismo $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$ que também é um morfismo de variedades.

Um *subgrupo a 1 parâmetro* é um homomorfismo $\lambda: \mathbb{C}^* \rightarrow G$ que também é um morfismo de variedades.

4.2.7 Exemplo. A aplicação

$$\begin{aligned} \chi: (\mathbb{C}^*)^n &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ (t_1, \dots, t_n) &\mapsto t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n} \end{aligned}$$

é um caráter do toro para quaisquer inteiros a_i .

4.2.8 Proposição. *Qualquer caráter do toro se estende a uma função racional em X .*

4.2.9 Proposição. *Dado um ponto $a = (a_1, \dots, a_n)$ no reticulado, definimos o grupo a 1 parâmetro $\lambda_a = (t^{a_1}, \dots, t^{a_n})$. O conjunto*

$$\left\{ a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \lim_{t \rightarrow 0} \lambda_a = L \right\}$$

forma um cone (semi-grupo). O diagrama tórico representando X é o fan formado por todos estes cones com $a \in \mathbb{Z}^n$.

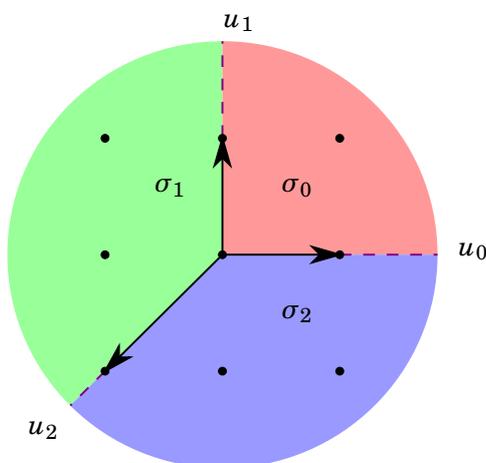
4.2.10 Exemplo. Considere $\mathbb{Z} \subset (\mathbb{C}^*)^2 \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Pintamos da mesma cor todos os pontos do reticulado que tem o mesmo limite. Temos o mergulho τ do toro $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{C}^*)^2$ em $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ definido por

$$\begin{aligned} \tau: \mathbb{T}^2 &\rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \\ (t_1, t_2) &\mapsto [t_1, t_2, 1], \end{aligned}$$

e o grupo a 1 parâmetro λ por

$$\begin{aligned} \lambda: \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathbb{T}^2 \\ t &\mapsto [t^3, t^2, 1]. \end{aligned}$$

Os limites do λ^a estão dados por

Figura 4.3: O fan de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_a(t) = \lim_{t \rightarrow 0} (t^a, t^b, 1) = \begin{cases} (1, 1, 1) & \text{if } a = 0 = b & (0) \\ (0, 1, 1) & \text{if } a > 0 = b & (u_0) \\ (1, 0, 1) & \text{if } a = 0 < b & (u_1) \\ (1, 1, 0) & \text{if } 0 > a = b & (u_2) \\ (0, 0, 1) & \text{if } a, b > 0 & (\sigma_0) \\ (1, 0, 0) & \text{if } 0 > a < b & (\sigma_1) \\ (0, 1, 0) & \text{if } a > b < 0 & (\sigma_2). \end{cases}$$

O diagrama tórico de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ correspondente é dado na Figura 4.3.

4.3 Politopos de Delzant

4.3.1 DEFINIÇÃO. Um *politopo* é o fecho convexo de um número finito de pontos em \mathbb{R}^n . Ele é de *Delzant* se ele for

- *simples*: existem n arestas incidentes a cada vértice;
- *racional*: as arestas incidentes ao vértice v são da forma $v + te_i$, onde $e_i \in \mathbb{Z}^n$ e $t \geq 0$; e
- *suave*: para cada vértice, as arestas incidente a ele podem ser escolhidas de tal maneira que formam uma base de \mathbb{Z}^n sobre \mathbb{Z} .

4.3.2 Teorema. Existe uma bijeção entre variedades tóricas simpléticas e politopos de Delzant:

$$(M^{2n}, \omega, T^n, \mu) \mapsto \mu(M).$$

4.3.3 Lema. Seja F uma face de um politopo $P \subset \mathbb{R}^n$. Então o conjunto $C_{F,P} := \{f \in (\mathbb{R}^n)^\vee \mid \text{supp}_P f = F\}$ é um cone.

4.3.4 DEFINIÇÃO. Dado um politopo P , definimos o fan \mathcal{F}_P sendo o conjunto de cones $C_{F,P}$, para todas as faces F do politopo P .

4.3.5 DEFINIÇÃO. Dado um politopo P , o *politopo dual* é

$$P^\vee := \left\{ f \in (\mathbb{R}^n)^\vee \mid f(x) \geq -1, \forall x \in P \right\}.$$

4.3.6 Proposição. Se o politopo P é racional ou suave, então o fan \mathcal{F}_P também é.

4.4 Variedades Tóricas Simpléticas

O conceito de aplicação momento é uma generalização do conceito de função Hamiltoniana. A noção de aplicação momento associada a uma ação de grupo é uma formalização do princípio de Noether em física que diz que a cada simetria (tal como uma ação de grupo) corresponde uma quantidade conservada.

4.4.1 DEFINIÇÃO. Seja (M, ω) uma variedade simplética e seja $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Então dH é uma 1-forma, e como ω é não degenerada existe um único campo de vetores X_H em M tal que $\iota_{X_H}(\omega) = dH$; ou seja, $\omega(\cdot, X_H) = dH(\cdot)$. O campo X_H é chamado de *campo Hamiltoniano* de H , e H é chamada de *aplicação Hamiltoniana* de X_H .

4.4.2 Exemplo (Quantidade Conservada). Consideremos uma partícula m movendo-se no espaço de configurações \mathbb{R}^3 com coordenadas $q = (q_1, q_2, q_3)$ movendo-se ao longo de uma curva $q(t)$ sob um potencial $V(q)$. Então pela segunda lei de Newton:

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} = -\nabla V(q).$$

Escrevemos os momentos $p_i = m \frac{dq_i}{dt}$ para $i = 1, 2, 3$ e função de energia $H(p, q) = \frac{1}{2m} |p|^2 + V(q)$. Então o espaço de configurações correspondente é \mathbb{R}^6 com coordenadas $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$. A segunda lei de Newton em \mathbb{R}^3 é equivalente às equações de Hamilton em \mathbb{R}^6 :

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{1}{m} p_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = m \frac{d^2 q_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}.$$

A quantidade conservada no movimento é H .

4.4.3 Exemplo (Fibrado cotangentes de \mathbb{S}^1). Um pêndulo simples é um sistema mecânico que consiste de uma barra de comprimento ℓ com uma extremidade fixada e com uma bola de chumbo de massa m na extremidade livre a qual oscila no plano vertical. Assume-se que a gravidade é constante e aponta para baixo e que ela é a única força agindo neste sistema de uma partícula, no qual a bola de chumbo é vista como uma massa pontual. Seja θ o ângulo entre a

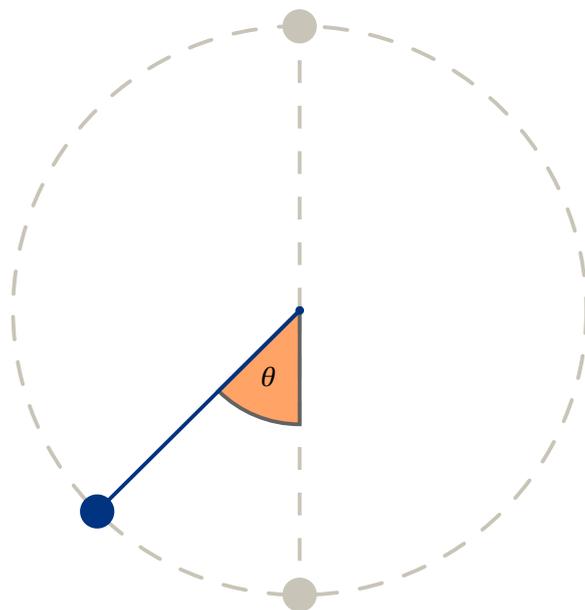


Figura 4.4: O pêndulo simples.

partícula e a vertical e seja ξ a coordenada ao longo das fibras de $T^*\mathbb{S}^1$. Então a função Hamiltoniana que descreve o movimento do pêndulo é:

$$H(\theta, \xi) = \frac{\xi^2}{2m\ell^2} + m\ell(1 - \cos\theta),$$

onde $K(\theta, \xi) = \frac{\xi^2}{2m\ell^2}$ é a energia cinética do sistema e $V(\theta, \xi) = m\ell(1 - \cos\theta)$ é a energia potencial. Note-se que módulo 2π em θ , a função H tem exatamente 2 pontos críticos, um estável e um instável.

4.4.4 Exercício (EXERCISE 20).

4.4.5 Exemplo (Fibrado cotangente de \mathbb{S}^2). Um pêndulo esférico é um sistema mecânico que consiste de uma barra de comprimento ℓ com uma extremidade fixada e com uma bola de chumbo de massa m na extremidade a qual oscila livremente em todas as direções. Assume-se que a gravidade é constante e aponta para baixo e que ela é a única força externa agindo neste sistema de uma partícula.

Sejam φ, θ as coordenadas esféricas da bola e para simplificar tomamos $m = \ell = 1$. Sejam η, ξ as coordenadas ao longo das fibras de $T^*\mathbb{S}^2$ induzidas pelas coordenadas esféricas. Então a função Hamiltoniana que descreve o movimento do pêndulo esférico é:

$$H(\varphi, \theta, \eta, \xi) = \frac{1}{2} \left(\eta^2 + \frac{\xi^2}{(\sin\varphi)^2} \right) + \cos\varphi.$$

Note-se a função H tem exatamente 2 pontos críticos em S^2 , um estável e um instável. O grupo de rotações ao longo da vertical age por simetrias do

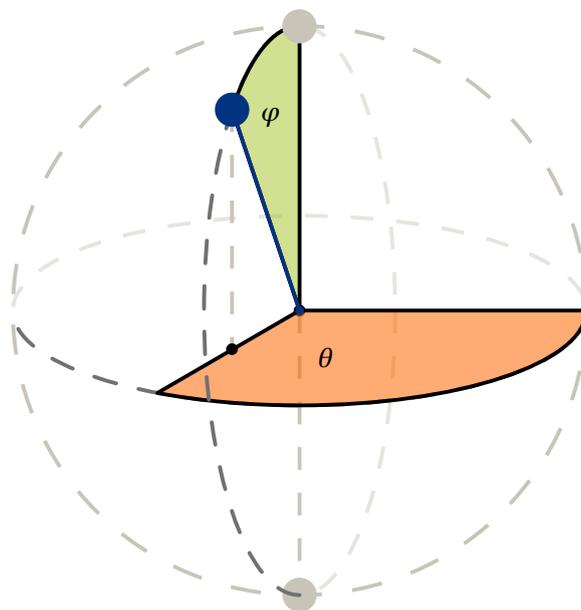


Figura 4.5: O pêndulo esférico.

sistema. A quantidade correspondente conservada é a integral de movimento $J(\varphi, \theta, \eta, \xi) = \xi$.

4.4.6 *Exercício.* Encontre os pontos p de T^*S^2 onde dH_p e dJ_p são linearmente dependentes.

4.4.7 *Exercício* (pp.56-57).

4.4.8 DEFINIÇÃO. Seja G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável. Uma ação (*suave*) é uma homomorfismo de grupos

$$a: G \rightarrow \text{Diff}(M)$$

tal que a aplicação de avaliação

$$\begin{aligned} G \times M &\rightarrow M \\ (g, m) &\mapsto a(g)(m) \end{aligned}$$

é suave. Ela é *simplética* se $a(G) \subset \text{Symp}(M, \omega)$, onde $\text{Symp}(M, \omega)$ é o grupo de symplectomorfismos.

A ação é chamada de *Hamiltoniana* se existir uma aplicação

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

tal que

1. a aplicação

$$\begin{aligned}\mu^X : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \langle \mu(p), X \rangle\end{aligned}$$

é a aplicação Hamiltoniana de X ; ou seja, $d\mu^X = \iota_X \omega$; e

2. μ é equivariante no sentido que

$$\mu \circ \alpha_g = \text{Ad}_g^* \circ \mu,$$

onde Ad^* denote a ação coadjunta de G em \mathfrak{g}^* .

A aplicação μ é chamada de *aplicação momento*.

4.4.9 Observação. Vamos usar frequentemente o grupo $G = T^n := \prod_1^n \mathbb{S}^1$. Neste caso, como ele é abeliano, a adjunta Ad é trivial. Portanto, a segunda condição é a de ser constante nas órbitas.

Assim é fácil ver que, dada uma aplicação momento μ , a aplicação $\mu + c$ também é uma aplicação momento, onde c é qualquer aplicação constante. Reciprocamente, uma aplicação momento de uma ação Hamiltoniana do toro é única a menos de translação por um constante.

4.4.10 Teorema (Atiyah [Ati82], Guillemin-Sternberg [GS82]). *Seja (M, ω) uma variedade simplética conexa compacta e T^m o m -toro. Se $\varphi: T^m \rightarrow \text{Symp}(M, \omega)$ é uma ação Hamiltoniana com aplicação de momento $\mu: M \rightarrow \mathbb{R}^m$, então*

1. os níveis de μ são conexos;
2. a imagem de μ é convexa;
3. a imagem de μ é o fecho convexo das imagens dos pontos fixos da ação.

A imagem $\mu(M)$ é o politopo momento.

4.4.11 Corolário. *Se a ação do toro T^m em Teorema 4.4.10 for efetiva, então existem pelo menos $m + 1$ pontos fixos.*

4.4.12 Teorema. *Com uma ação Hamiltoniana livre do toro T^m na variedade simplética (M, ω) , temos que $\dim M \geq 2m$.*

4.4.13 DEFINIÇÃO. Uma variedade tórica simplética é uma variedade simplética conexa compacta (M^{2n}, ω) na qual existe uma ação Hamiltoniana livre do toro T^n , junto com uma escolha de uma aplicação momento μ .

Duas variedades tóricas simpléticas $(M_i, \omega_i, T_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, são *equivalentes* se existir

- um isomorfismo de grupos $\varphi: T_1 \rightarrow T_2$; e
- um symplectomorfismo $f: M_1 \rightarrow M_2$ que é φ -equivariante e tal que $\mu_1 = \mu_2 \circ f$.

Capítulo 5

Fibrados Vetoriais

5.1 Construções

5.1.1 DEFINIÇÃO. Uma aplicação contínua $\pi: E \rightarrow B$ é um *fibrado vetorial sobre B* se

- cada fibra $\pi^{-1}(b) \cong \mathbb{R}^k$, $b \in B$, for um espaço vetorial;
- existirem uma vizinhança U em volta de cada ponto $b \in B$ e um homeomorfismo $\varphi_U: U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(U)$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xleftarrow{\varphi_U} & U \times \mathbb{R}^k \\ \pi \downarrow & & \swarrow \text{pr}_U \\ U & & \end{array}$$

- a restrição $\varphi_U|_{\{b\} \times \mathbb{R}^k}: \{b\} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(b)$ for um isomorfismo de espaços vetoriais.

Dizemos que B é o *espaço de base*, E o *espaço total*, π a *projeção*, e φ_U uma *trivialização local*. A dimensão k da fibra se chama o *posto* do fibrado vetorial. Por abuse de notação, as vezes denotamos o fibrado vetorial simplesmente por E .

Dizemos que o fibrado vetorial é *trivial* se existir uma trivialização global $\varphi_B: B \times \mathbb{R}^k \rightarrow E$.

5.1.2 DEFINIÇÃO. Para quaisquer duas trivializações φ_U e φ_V , $U \cap V \neq \emptyset$, as compostas

$$\begin{aligned} g_{UV}: U \cap V &\rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^k) \\ b &\mapsto (\varphi_U^{-1} \circ \varphi_V)|_{\{b\} \times \mathbb{R}^k} \end{aligned}$$

se chamam as *funções de transição*. Note que para cada $b \in U \cap V$, temos que $g_{UV}(b)$ define um isomorfismo linear da fibra que leva a estrutura vetorial sobre V para a estrutura vetorial sobre U .

5.1.3 DEFINIÇÃO. Um *fibrado vetorial suave* é um fibrado vetorial tal que E e B são variedades suaves, a projeção $\pi: E \rightarrow B$ é suave, e as trivializações φ_U são difeomorfismos. Um *fibrado vetorial complexo* é um fibrado vetorial suave tal que as fibras $F \cong \mathbb{C}^n$ e as funções de transição $g_{UV}(b) \in \text{GL}(\mathbb{C}^n) \subset \text{GL}(\mathbb{R}^{2n})$ para cada $b \in U \cap V$. Um *fibrado vetorial holomorfo* é um fibrado vetorial complexo tal que E e B são variedades complexas, a projeção $\pi: E \rightarrow B$ é holomorfa, e as trivializações $\varphi_U: U \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ são biholomorfas.

5.1.4 Exemplo. Dada uma variedade M , o fibrado (co)tangente é um fibrado vetorial de posto $m := \dim M$.

5.1.5 Lema (Cociclo de Čech). *As funções de transição satisfazem as relações*

$$\begin{aligned} g_{UV}(b) \cdot g_{VU}(b) &= \text{id} & \forall b \in U \cap V \\ g_{UV}(b) \cdot g_{VW}(b) \cdot g_{WU}(b) &= \text{id} & \forall b \in U \cap V \cap W. \end{aligned}$$

A segunda condição é chamada de cociclo de Čech.

5.1.6 Exercício. Mostre Lema 5.1.5.

5.1.7 Proposição. *Seja B um espaço topológico com uma cobertura aberta \mathcal{U} . Dado um espaço vetorial real F , e aplicações $\{g_{UV} \mid U, V \in \mathcal{U}\}$ com $g_{UV}(b) \in \text{GL}(F)$ para cada dois abertos $U, V \subset B$ e $b \in U \cap V$ que satisfazem as relações de Lema 5.1.5, existe um único fibrado vetorial $\pi: E \rightarrow B$ com fibra F e funções de transição $\{g_{UV} \mid U, V \in \mathcal{U}\}$.*

Se exigimos além disso que B seja variedade complexa, $F \cong \mathbb{C}^n$, e as aplicações $g_{UV}(b) \in \text{GL}(\mathbb{C}^n)$ para cada dois abertos $U, V \in \mathcal{U}$ e $b \in U \cap V$, então existe um único fibrado vetorial complexo com fibra F e funções de transição $\{g_{UV} \mid U, V \in \mathcal{U}\}$.

Se exigimos mais ainda que as funções de transição sejam holomorfas, então existe um único fibrado vetorial holomorfo com fibra F e funções de transição $\{g_{UV} \mid U, V \in \mathcal{U}\}$.

Demonstração. Defina

$$E := \left(\bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} U \times F \right) / \sim$$

onde a relação de equivalência é definida da seguinte maneira. Seja $(x, v) \in U \times F$ e $(y, w) \in V \times F$. Então dizemos que $(x, w) \sim (y, w)$ se $x = y$ e existir uma função de transição g_{UV} tal que $v = g_{UV}(x) \cdot w$. A projeção

$$\begin{aligned} \pi: E &\rightarrow B \\ [(x, v)] &\mapsto x \end{aligned}$$

é bem-definida e sobrejetiva, e é contínua pela definição da topologia quociente. \square

5.1.8 Observação. Proposição 5.1.7 mostra que para definir um fibrado vetorial sobre uma base B , só precisamos saber qual é o posto e quais são as funções de transição. Então, o princípio para construção de fibrados vetoriais é que operações canônicas entre espaços vetoriais (independentes de escolha de base) definem também operações entre fibrados vetoriais.

5.1.9 Exemplo. Seja $E \rightarrow B$ um fibrado vetorial com fibra F e funções de transição $\{g_{UV}\}$. Então definimos os seguintes fibrados vetoriais:

- *fibrado dual:* $E^\vee \rightarrow B$ com fibra F^\vee pelas funções de transição $h_{UV}(b) := (g_{UV}^{-1})^t(b)$;
- *fibrado determinante:* $\wedge^r E$ com fibra $\wedge^r F$ pelas aplicações de transição $h_{UV}(b) := \wedge^r g_{UV}(b)$. Caso que $r = \dim F$, temos o fibrado vetorial de posto 1 que se chama o *fibrado determinante*. Se $E = T^*M$ for o fibrado cotangente de uma variedade M^m , então o fibrado determinante $\wedge^m T^*M$ se chama o *fibrado canônico* e é denotado por K_M .

5.1.10 Exemplo. Sejam $E_1 \rightarrow B$ e $E_2 \rightarrow B$ dois fibrados vetoriais sobre B com fibras F_1, F_2 e funções de transição $\{f_{UV}\}, \{g_{UV}\}$, respectivamente. Então definimos os seguintes fibrados vetoriais:

- *soma de Whitney:* $E_1 \oplus E_2$ como sendo o único fibrado vetorial com fibra $F_1 \oplus F_2$ e funções de transição $\{h_{UV}\}$ onde

$$h_{UV}(b) := \begin{pmatrix} f_{UV}(b) & 0 \\ 0 & g_{UV}(b) \end{pmatrix};$$

- *fibrado tensor:* $E_1 \otimes E_2$ como sendo o único fibrado vetorial com fibra $F_1 \otimes F_2$ e funções de transição $\{h_{UV}\}$ onde $h_{UV}(b) := f_{UV}(b) \otimes g_{UV}(b)$.

5.1.11 Exercício. Mostre que as funções de transição definidas nos Exemplos 5.1.9 and 5.1.10 são de fato funções de transição.

5.1.12 Exemplo. Podemos definir fibrados de posto 1 sobre \mathbb{P}^1 da seguinte maneira. Sejam U, V as cartas canônicas com coordenadas z, ξ , respectivamente. A função de transição da variedade é dada por $z \mapsto \xi = z^{-1}$. O fibrado $\mathcal{O}(n)$ é definido como sendo trivial sobre U, V . As cartas são $U \times \mathbb{C}$ e $V \times \mathbb{C}$ com coordenadas (z, u) e (ξ, v) , respectivamente, com a função de transição do fibrado definido pelo $(z, u) \mapsto (\xi, v) = (z^{-1}, z^{-n}u)$. Fica claro da definição que:

- $\mathcal{O}(1)^\vee = \mathcal{O}(-1)$,
- $\mathcal{O}(m) \otimes \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(m+n)$, e
- $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(1)^{\otimes n}$.

5.1.13 Exemplo. Generalizando Exemplo 5.1.12, definimos agora o fibrado de linhas $\mathcal{O}(m)$ em \mathbb{P}^n . Sejam U_i as cartas canônicas e defina as funções de transição

$$g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$[z_0, \dots, z_n] \mapsto \frac{z_j^m}{z_i^m}.$$

Note que na interseção $U_i \cap U_j \cap U_k$, temos que

$$g_{ij}(z) \cdot g_{jk}(z) \cdot g_{ki}(z) = \frac{z_j^m}{z_i^m} \cdot \frac{z_k^m}{z_j^m} \cdot \frac{z_i^m}{z_k^m} = 1,$$

$$g_{ij}(z) \cdot g_{ji}(z) = \frac{z_j^m}{z_i^m} \cdot \frac{z_i^m}{z_j^m} = 1.$$

Portanto, as aplicações $\{g_{ij} \mid i, j = 0, \dots, n\}$ são de fato funções de transição e assim definem um fibrado de posto 1. Como elas são holomorfas, o fibrado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ é um fibrado holomorfo. Ainda valem as seguintes afirmações:

- $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^\vee = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$,
- $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(j) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(j+k)$, e
- $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\otimes k}$.

5.1.14 Lema. *Seja E um fibrado vetorial holomorfo de posto r sobre \mathbb{P}^1 . Então existem inteiros $a_1 \leq \dots \leq a_r$ tais que $E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_r)$.*

5.1.15 Observação. O análogo do Lema 5.1.14 para \mathbb{P}^n , $n > 1$, é completamente falso.

5.1.16 Exercício. 1. Dada uma variedade M , encontre as funções de transição do fibrado tangente TM em termos das funções de transição da variedade M .

2. Escreva explicitamente as funções de transição do fibrado tangente, cotangente, e canônico de \mathbb{P}^n .
3. Como $T\mathbb{P}^1$ é um fibrado de linhas, segue do Lema 5.1.14 que $T\mathbb{P}^1 \cong \mathcal{O}(n)$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Encontre n .
4. Encontre $j \in \mathbb{Z}$ tal que $K_{\mathbb{P}^n} \cong \mathcal{O}(j)$.

5.1.17 DEFINIÇÃO. Dada $f: M \rightarrow N$ e um fibrado $\pi: E \rightarrow N$, define-se o *pullback* de E por f como o único fibrado que completa o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \longrightarrow & E \\ f^*\pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

onde $f^*E := \{(m, e) \in M \times E \mid f(m) = \pi(e)\}$ e $f^*\pi = (\text{pr}_M)|_{f^*E}$, onde pr_M é a projeção na primeira coordenada.

5.1.18 Exercício. Encontre as funções de transição do pullback f^*E .

5.1.19 DEFINIÇÃO. Seja $f: X \rightarrow \mathbb{P}^n$ um mergulho projetivo. Então definimos $\mathcal{O}_X(k)$ como o pullback do fibrado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ ao longo de f .

5.1.20 Exemplo (Soma de Whitney). Dados os fibrados vetoriais $\pi_1: E_1 \rightarrow M$ e $\pi_2: E_2 \rightarrow M$, defina a soma de Whitney $E_1 \oplus E_2$ como o pullback do fibrado produto $\pi_1 \times \pi_2$ pela aplicação diagonal $\Delta: M \rightarrow M \times M$:

$$\begin{array}{ccc} E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & E_1 \times E_2 \\ \Delta^*(\pi_1 \times \pi_2) \downarrow & & \downarrow \pi_1 \times \pi_2 \\ M & \xrightarrow{\Delta} & M \times M \end{array}$$

5.1.21 Exercício. Mostre que as funções de transição da soma de Whitney são da forma

$$\begin{pmatrix} g_{UV}(b) & 0 \\ 0 & h_{UV}(b) \end{pmatrix},$$

onde g_{UV} e h_{UV} são as funções de transição de E_1 e E_2 , respectivamente. Note que isso também mostra que a soma de Whitney é um fibrado vetorial isomorfo à soma de fibrados vetoriais definida no Exemplo 5.1.10.

5.1.22 DEFINIÇÃO. Seja $\pi: E \rightarrow B$ um fibrado vetorial (holomorfo). Uma *seção (local)* de E é uma aplicação $s: U \subset B \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = \text{id}$ (veja Figura 5.1). Seções $s_1, \dots, s_j: U \rightarrow E$ se chamam *linearmente independentes* se os vetores $s_1(b), \dots, s_j(b)$ foram linearmente independentes em $\pi^{-1}(b)$ para cada $b \in U$.

Sempre existe uma *seção zero* $s: B \rightarrow E$, que é definida em cada trivialização $\varphi: U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$ como

$$\begin{aligned} s|_U: U &\rightarrow \pi^{-1}(U) \\ b &\mapsto \varphi(b, 0). \end{aligned}$$

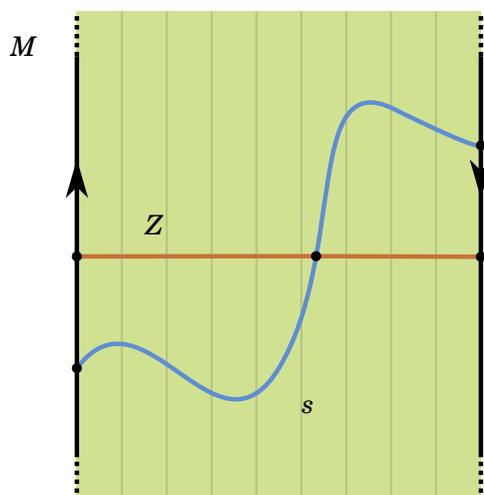


Figura 5.1: O fibrado vetorial da faixa de Möbius M sobre o círculo Z . O círculo é mergulhado em M como a seção zero do fibrado. No caso da faixa de Möbius, cada seção s do fibrado intersecta a seção zero em um número ímpar de pontos.

Essa seção é bem-definida pois as funções de transição são lineares e levam zero para zero.

5.1.23 Proposição. *Seja $E \rightarrow B$ um fibrado vetorial de posto k que admite k seções globais linearmente independentes. Então E é o fibrado trivial.*

5.1.24 *Exercício.* Dada uma variedade M , mostre que \mathcal{O}_M é o fibrado trivial.

5.1.25 Lema. *A seção zero $s: B \rightarrow E$ de um fibrado vetorial (holomorfo) define um mergulho (holomorfo) de B dentro de E .*

5.1.26 *Exemplo (Projetivização).* Uma construção natural de espaços vetoriais é a projetivização. Isto é, para um espaço vetorial V sobre o corpo \mathbb{k} , podemos definir a relação de equivalência \sim em V , onde dois vetores v e w são equivalentes se existir um $\lambda \in \mathbb{k}$ tal que $v = \lambda w$. Definimos a *projetivização de V* como

$$\text{Proj } V := V / \sim,$$

que tem a aplicação natural

$$\begin{aligned} V &\rightarrow \text{Proj } V \\ v &\mapsto [v]. \end{aligned}$$

Projetivizam-se as fibras e as funções de transição para obter a projetivização do fibrado. Note que a projetivização não é mais um fibrado vetorial.

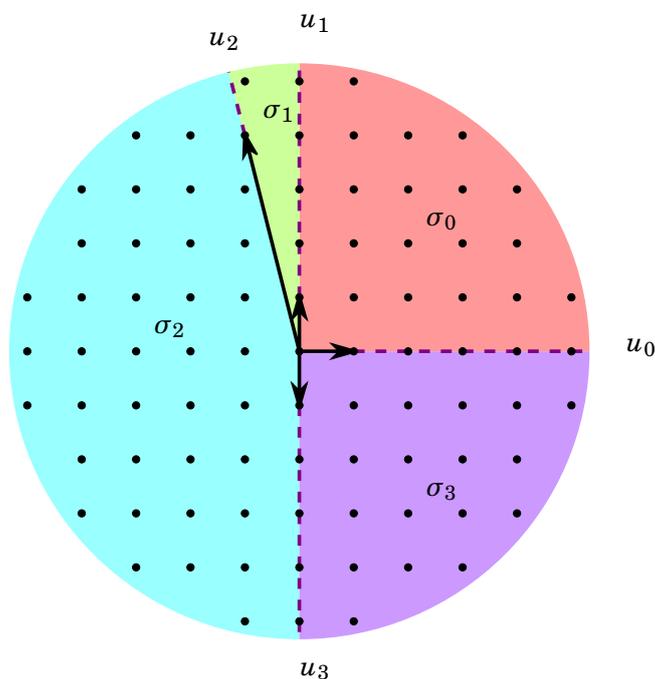


Figura 5.2: O fan para F_4 .

5.1.27 *Exemplo* (Superfícies de Hirzebruch). As superfícies de Hirzebruch são $F_n := \text{Proj}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$. Esse é um exemplo de uma variedade tórica com diagrama tórico como na Figura 5.2. Comparar as cartas dadas pelo método tórico (veja Figura 5.2) com as que se obtém de definição de F_n .

5.2 Grupo de Picard

5.2.1 **Proposição.** *Seja X uma variedade complexa e L, M, N fibrados de linhas quaisquer. Então*

1. $L \otimes M$ é um fibrado de linhas;
2. $L \otimes \mathcal{O}_M \cong L$;
3. $L \otimes L^\vee \cong \mathcal{O}_M$;
4. $(L \otimes M) \otimes N \cong L \otimes (M \otimes N)$; e
5. $L \otimes M \cong M \otimes L$.

Isto é a dizer que o conjunto de fibrados de linhas (módulo isomorfismo) é um grupo abeliano, e \mathcal{O}_M é a identidade do grupo.

5.2.2 **DEFINIÇÃO.** Denotamos por $\text{Pic}(M)$ o grupo abeliano de fibrados de linhas holomorfos (módulo isomorfismo).

5.3 GAGA

5.3.1 Teorema (GAGA [Ser56]). *Fibrados holomorfos sobre variedades projetivas são algébricos.*

5.4 Formas Diferenciais

Capítulo 6

Feixes

6.1 Feixificação

6.1.1 Exemplo. Em muitos contextos, os axiomas que definem um feixe são bem naturais. Um exemplo padrão é o das aplicações suaves C^∞ definidas nas vizinhanças abertas de uma variedade suave M . Elas satisfazem as seguintes condições óbvias:

- *Restrição:* Dadas vizinhanças $U \subset V \subset W$ e uma aplicação $f \in C^\infty(W)$, temos que $(f|_V)|_U = f|_U$;
- *Localidade:* para uma aplicação $f \in C^\infty(U)$ tal que f se restringe á aplicação 0 em cada vizinhança $V \subset U$, então f é identicamente zero; e
- *Colagem:* dadas vizinhanças U, V e aplicações $f \in C^\infty(U), g \in C^\infty(V)$ que coincidem na interseção, existe uma aplicação $h \in C^\infty(U \cup V)$ tal que $h|_U = f$ e $h|_V = g$. Essa aplicação é dada por

$$h: U \cup V \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in U \\ g(x) & \text{se } x \in V \end{cases}.$$

A aplicação f é suave pois suavidade é uma propriedade local.

Essas afirmações também valem para as funções holomorfas \mathcal{O} definidas nas vizinhanças abertas de uma variedade complexa.

6.1.2 DEFINIÇÃO. Um pré-feixe é uma abstração da condição de restrição. Dizemos que \mathcal{F} é um *pré-feixe de grupos abelianos* sobre um espaço topológico X se ele leva cada aberto U de X para um grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$ e leva cada inclusão $U \subset V$ para um homomorfismo de grupos abelianos $r_U^V: \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ chamado de *restrição*. Além disso, exigimos que

- $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$,

- $r_U^U = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$, e
- $r_U^V \circ r_V^W = r_U^W$ para as inclusões $U \subset V \subset W$.

Os elementos $s \in \mathcal{F}(U)$ são chamados de *seções*, e os elementos $s \in \mathcal{F}(X)$ de *seções globais*.

Também podemos definir um pré-feixe de anéis (resp. de módulos, de grupos, etc) da maneira análoga, onde $\mathcal{F}(U)$ é um anel (resp. módulo, grupo, etc) e as restrições r_U^V são homomorfismos de anéis (resp. módulo, grupo, etc).

Um feixe \mathcal{F} sobre X é um pré-feixe que satisfaz as seguintes duas propriedades:

- *Colagem*: para uma família de abertos $\{U_i\}$, se $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ e $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$, então existe $s \in \mathcal{F}(\sum_i U_i)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$; e
- *Localidade*: se $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que U tem cobertura $U = \sum_i U_i$ e $s|_{U_i} = 0$ para cada i , então $s = 0$.

6.1.3 Exercício. Mostre que a seguinte é uma definição equivalente de (pré)feixes. Veja appendix A para as definições relevantes.

Seja \mathbf{C} uma subcategoria de **Sets**. As escolhas usuais são **Ab**, **R-Mod**, ou **Ring**, e quase sempre vamos escolher uma dessas. Um *pré-feixe* sobre um espaço topológico X é um funtor contravariante $\mathcal{F} : \mathbf{Top}_X \rightarrow \mathbf{C}$.

Os elementos $s \in \mathcal{F}(U)$ são chamados de *seções*, e os elementos $s \in \mathcal{F}(X)$ de *seções globais*. O funtor também dá morfismos $r_U^V := \mathcal{F}(U \subset V)$ para cada inclusão $U \subset V$, que são chamados de *restrições*. Denotamos por $s|_U$ a restrição $r_U^V(s)$, onde $s \in \mathcal{F}(V)$ é uma seção e $U \subset V$.

Um feixe sobre X é um pré-feixe que satisfaz as seguintes duas propriedades:

- *Colagem*: para uma família de abertos $\{U_i\}$, se $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ e $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$, então existe $s \in \mathcal{F}(\sum_i U_i)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$; e
- *Localidade*: se $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que U tem cobertura $U = \sum_i U_i$ e $s|_{U_i} = 0$ para cada i , então $s = 0$.

Se $\mathbf{C} = \mathbf{Ab}$, então r_U^V é um homomorfismo de grupos e \mathcal{F} é chamado de *(pré)feixe de grupos abelianos*. Assim, um (pré)feixe é sempre chamado de acordo com a categoria a qual pertence: *(pré)feixe de módulos* para $\mathbf{C} = \mathbf{R-Mod}$; *(pré)feixe de anéis* para $\mathbf{C} = \mathbf{Ring}$; etc.

6.1.4 Exemplo (Feixe constante). Seja A um grupo e defina o feixe constante \underline{A} sobre o espaço topológico como sendo $\underline{A}(U) := A$ para cada aberto $U \neq \emptyset$ de X , onde as restrições são todas iguais ao morfismo identidade. Isso é um feixe de grupos. Também temos construções análogas para A um anel, módulo, etc.

6.1.5 Exemplo (Skyscraper). Seja X um espaço topológico, $x_0 \in X$ um ponto, e A um grupo abeliano. Então o feixe Skyscraper A_{x_0} é definido como

$$A_{x_0}(U) := \begin{cases} A & \text{se } x_0 \in U \\ 0 & \text{se } x_0 \notin U \end{cases}, \quad A_{x_0}(U \subset V) := \begin{cases} \text{id} & \text{se } x_0 \in U \\ 0 & \text{se } x_0 \notin U \end{cases}$$

Propriedade de colagem: dada uma família de abertos $\{U_i\}$ e seções $s_i \in A_{x_0}(U_i)$ tais que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$, definimos $s \in A_{x_0}(\sum_i U_i)$ como

$$s(x) = s_i(x) \quad \text{se } x \in U_i.$$

Essa seção s é bem-definida pois as seções s_i coincidem nas interseções. Pela definição de s fica claro que $s|_{U_i} = s_i$.

Propriedade de localidade: seja $s \in A_{x_0}(U)$ uma seção tal que $U = \sum_i U_i$ e $s|_{U_i} = 0$. Se $x_0 \in U$, seja U_j um conjunto com $x_0 \in U_j$. Então $A_{x_0}(U_j \subset U) = \text{id}$ e daí que $s = 0$.

6.1.6 Exemplo. Definimos o feixe de funções holomorfas na variedade complexa M como sendo

$$\mathcal{O}_M(U) := \{f: U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é holomorfa}\}$$

com as restrições dadas pelas restrições usuais de aplicações. Ele é também chamado de *feixe de estrutura*. Escrevemos \mathcal{O} em vez de \mathcal{O}_M no caso que não seja ambíguo qual variedade estamos usando. Se quisermos enfatizar que \mathcal{O} é feixe de funções holomorfos e não só de funções algébricas, escreveremos \mathcal{O}_{hol} .

Esse feixe é um feixe de anéis. Mais ainda, se U for conexo, então o anel $\mathcal{O}(U)$ é um domínio de integridade. De fato, sejam $f, g \in \mathcal{O}(U)$ tais que $f \cdot g \equiv 0$ em U . Suponha que $p \in U$ seja um ponto tal que $f(p) \neq 0$ e defina $V := \{x \in U \mid g(x) = 0\}$. Então $p \in V$ e o princípio de identidade Teorema 1.1.12 garante que V é aberto. Como V também é fechado (pela continuidade de f) e U é conexo, segue que $U = V$. Portanto $g \equiv 0$.

Também definimos o feixe de funções holomorfas sem zeros na variedade complexa M como sendo

$$\mathcal{O}_M^*(U) := \{f: U \rightarrow \mathbb{C}^* \mid f \text{ é holomorfa}\}.$$

Esse é um subfeixe de \mathcal{O}_M .

6.1.7 Exercício. Seja M uma variedade complexa e $f \in \mathcal{O}(M)$, e defina a subvariedade analítica $V = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$. Definimos o feixe ideal \mathcal{I}_V como

$$\mathcal{I}_V(U) := \{g \in \mathcal{O}(U) \mid g|_{U \cap V} \equiv 0\},$$

com as restrições dadas pelas restrições usuais de funções. Esse feixe é um \mathcal{O} -módulo pois para cada aberto U , $\mathcal{I}_V(U)$ é um ideal do anel $\mathcal{O}(U)$. Se $U \cap V = \emptyset$, então $\mathcal{I}_V(U) = \mathcal{O}(U)$.

6.1.8 DEFINIÇÃO. Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} dois feixes do mesmo tipo (de grupos/anéis/etc) sobre o mesmo espaço topológico X . Um *morfismo dos feixes* é uma transformação $\tau: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$; isto é, uma família de morfismos (de grupos/anéis/etc) $\{\tau_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \mid U \subset X \text{ aberto}\}$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\tau_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow r_{UV} & & \downarrow r'_{UV} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\tau_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

para qualquer inclusão $V \subset U$.

6.1.9 DEFINIÇÃO. Dado um morfismo de feixes $\tau: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, construímos o *pré-feixe de núcleo* $\ker \tau$ como

$$(\ker \tau)(U) := \ker(\tau_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)).$$

6.1.10 Exercício. Mostre que $\ker \tau$ é um feixe.

6.1.11 DEFINIÇÃO. Seja \mathcal{F} um feixe sobre X , $p \in X$ um ponto, e considere os pares (U, s) tais que $p \in U$ e $s \in \mathcal{F}(U)$. Dizemos que dois pares $(U, s), (U', s')$ são equivalentes se existir um aberto $V \subset U \cap U'$ tal que $s|_V = s'|_V$. Isso define uma relação de equivalência. O *germe* de s , denotado por s_p , é a sua classe de equivalência. Definimos o *stalk de \mathcal{F} em p* como sendo

$$\mathcal{F}_p := \{(U, s) \mid p \in U \text{ e } s \in \mathcal{F}(U)\} / \sim.$$

Então o stalk é o conjunto dos germes.

6.1.12 Exemplo. Seja M uma variedade holomorfa e \mathcal{O} o seu feixe de aplicações holomorfas. Para um ponto $x \in M$, o stalk \mathcal{O}_x sobre x é um anel local. A estrutura de anel vem da estrutura de anel de $\mathcal{O}(U)$ para todas as vizinhanças U de x . O anel maximal é dado por

$$\mathfrak{m}_x := \{f \in \mathcal{O}_x \mid f(x) = 0\}.$$

É uma verificação simples que \mathfrak{m}_x é um anel. Para ver que ele é maximal, considere o homomorfismo de anéis

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_x &\rightarrow \mathbb{C} \\ f_x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Ele é bem definido pois cada representante f de uma classe de equivalência f_x de \mathcal{O}_x coincide no ponto x . O núcleo desse homomorfismo é \mathfrak{m}_x e daí que

$$\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_x \cong \mathbb{C}. \quad (6.1)$$

Como um ideal é maximal se é só se o quociente é um corpo, o ideal \mathfrak{m}_x é maximal.

Ele é o único maximal pelo seguinte argumento. Seja $I < \mathcal{O}_x$ um ideal maximal e $f \in I \setminus \mathfrak{m}_x$. Como $f(x) \neq 0$, existe uma vizinhança V de x tal que $f|_V$ não tem zeros, e daí que $g := (1/f)_x \in \mathcal{O}_x$. Como I é ideal, $gf = 1 \in I$. Portanto, não existe $f \in I \setminus \mathfrak{m}_x$.

6.1.13 Proposição (Feixificação). *Seja \mathcal{F} um pré-feixe sobre X . Então existe um feixe \mathcal{F}^+ sobre X e um morfismo $\tau: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ tais que para qualquer outro morfismo $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, existe um único morfismo $\beta: \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ que faz o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{F}^+ \\ & \searrow \alpha & \vdots \beta \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

comutar.

Demonstração. Definimos o feixe \mathcal{F}^+ associado ao pré-feixe \mathcal{F} por colagem das seções. Seja $U \subset X$ um aberto de X , e $\mathcal{F}^+(U)$ o conjunto de aplicações

$$s: U \rightarrow \bigcup_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

tais que

1. $s(x) \in \mathcal{F}_x$ para cada $x \in U$; e
2. s é localmente uma seção do pré-feixe \mathcal{F} .

Queremos dizer por “localmente” que para cada $x \in U$ existe uma vizinhança $V \subset U$ de x e uma seção $\sigma \in \mathcal{F}(V)$ com $s(y) = \sigma_y$. A restrição $r_V^U(s) := s|_V$ é a restrição da aplicação.

Agora mostramos que \mathcal{F}^+ satisfaz a propriedade de colagem. Seja $\{U_i \mid i \in I\}$ uma família de abertos de X e $s_i \in \mathcal{F}^+(U_i)$ seções tais que $s_i|_{U_j} = s_j|_{U_i}$ para $i, j \in I$ quaisquer. Podemos colar essas seções por definir $s \in \bigcup_I U_i$:

$$\begin{aligned} s: U &\rightarrow \bigcup_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ y &\mapsto s_i(y) \quad \text{se } y \in U_i. \end{aligned}$$

Essa aplicação é bem-definido pois as seções $\{s_i \mid i \in I\}$ coincidem nas interseções. Como as condições para ser uma seção de \mathcal{F}^+ são propriedades locais e s é localmente igual a s_i , vemos que s também é uma seção. Além disso, $s|_{U_i} = s_i$ e daí que \mathcal{F}^+ satisfaz a propriedade de colagem.

Para ver que \mathcal{F}^+ satisfaz a propriedade de localidade, note que as seções $s \in \mathcal{F}^+(U)$ são aplicações, que são zero se e somente se são zero em cada elemento de uma cobertura de U .

Definimos o morfismo $\tau: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ por

$$\begin{aligned} \tau: \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{F}^+(U) \\ s &\mapsto (x \mapsto s_x). \end{aligned}$$

Considerando as propriedades de s ser uma seção de $\mathcal{F}(U)$, vemos que $\tau(s)$ é uma seção de $\mathcal{F}^+(U)$. Se $x \in V \subset U$, então $(s|_V)_x = s_x$ e daí que τ comuta com as restrições.

O morfismo τ tem a propriedade universal. De fato, seja $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de prê-feixes e $s \in \mathcal{F}^+(U)$. Pela propriedade Item 2, existe uma cobertura $\{U_i \subset U \mid i \in I\}$ de U e seções $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tais que $s|_{U_i} = s_i$. Em particular, $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ e daí que $\alpha(s_i)|_{U_i \cap U_j} = \alpha(s_j)|_{U_i \cap U_j}$. Como \mathcal{G} é um feixe, existe uma seção $t \in \mathcal{G}(U)$ tal que $t|_{U_i} = \alpha(s_i)$. Então podemos definir $\beta: \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ por

$$\begin{aligned} \beta: \mathcal{F}^+(U) &\rightarrow \mathcal{G}(U) \\ s &\mapsto t. \end{aligned}$$

Como α comuta com as restrições, β também comuta, mostrando que τ é um morfismo. \square

6.1.14 DEFINIÇÃO. O feixe \mathcal{F}^+ é chamado de *feixificação* de \mathcal{F} , e é definido a menos de isomorfismo.

6.1.15 *Exemplo.* Definimos agora o feixe de funções meromorfas na variedade complexa conexa M . Em primeiro lugar, seja \mathcal{R} o prê-feixe de funções holomorfas que não são divisores de zero:

$$\mathcal{R}(U) := \{f \in \mathcal{O}(U) \mid \exists g \in \mathcal{O}(U) \text{ tq } fg = 0\}.$$

Então o *feixe de funções meromorfas* é a feixificação $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{\text{pre}}^+$ do seguinte prê-feixe:

$$\mathcal{M}_{\text{pre}}: U \mapsto \mathcal{R}(U)^{-1}\mathcal{O}(U),$$

a localização de $\mathcal{O}(U)$ em $\mathcal{R}(U)$. Isto é bem-definido pois $\mathcal{R}(U)$ é um sistema multiplicativo. Note que para U conexo, o anel $\mathcal{O}(U)$ é um domínio de integridade e $\mathcal{M}_{\text{pre}}(U)$ é o corpo de frações de $\mathcal{O}(U)$.

Para obter uma ideia de que é uma aplicação meromorfa, olhamos para definição de feixificação. Dada uma seção $f \in \mathcal{M}(U)$, existem uma cobertura $\{V_i \mid i \in I\}$ de U e seções $g_i \in \mathcal{O}(V_i)$, $h_i \in \mathcal{R}(V_i)$ tais que $f|_{V_i} = g_i/h_i$. Podemos assumir que g_i e h_i são relativamente primas.

Como no caso das funções holomorfas, também temos o subfeixe \mathcal{M}^* , que é a feixificação do prê-feixe

$$\mathcal{M}_{\text{pre}}^*: U \mapsto \mathcal{R}(U)^{-1}\mathcal{O}(U)^*,$$

que é o subanel de $\mathcal{R}(U)^{-1}\mathcal{O}(U)$ com numeradores em $\mathcal{O}(U)^*$.

6.2 Sequências Exatas

6.2.1 DEFINIÇÃO. Dado um morfismo de feixes $\tau: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, definimos a *imagem* $\text{im } \tau$ como sendo a feixificação do prê-feixe $U \mapsto \tau\mathcal{F}(U)$. Dizemos que \mathcal{F} é *subfeixe* de \mathcal{G} se $\ker \tau = 0$. Nesse caso τ é chamado de *injetivo*. Analogamente, um morfismo é dito *sobrejetivo* se $\text{Im } \tau \cong \mathcal{G}$. Agora, para um subfeixe \mathcal{F} de \mathcal{G} , o *quociente* \mathcal{G}/\mathcal{F} é a feixificação do prê-feixe $U \mapsto \mathcal{G}(U)/\tau\mathcal{F}(U)$.

Temos então o conceito de uma *sequência exata de feixes*; isto é, a sequência

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

é dita *exata* se $\ker \alpha = \text{Im } \beta$, α é injetivo e β é sobrejetivo.

6.2.2 Proposição. *Seja $\tau: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de feixes. Então*

- *ele é injetivo se e somente se o morfismo de seções $\tau_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ é injetivo para cada aberto U , que acontece se e somente se o morfismo induzido dos stalks é injetivo; mas*
- *ele é sobrejetivo se e somente se o morfismo dos stalks $\tau_p: \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ é sobrejetivo para cada ponto p .*

A condição de ser sobrejetivo nas seções é mais forte do que a de ser sobrejetivo nos stalks, como Exemplo 6.2.3 mostra.

6.2.3 *Exemplo.* Existe um morfismo de feixes (abelianos) $\tau: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ que é sobrejetivo nos stalks mas que não é sobrejetivo nas seções. Tome o espaço topológico \mathbb{R} , o feixe constante $\mathcal{F} = \underline{\mathbb{Z}}$, e a soma direta de dois skyscrapers $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$, onde p, q são dois pontos distintos de \mathbb{R} . Defina o morfismo de feixes τ :

$$\tau_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$$

$$n \mapsto \begin{cases} (n, n) & \text{se } \{p, q\} \subset U \\ n & \text{se } |\{p, q\} \cap U| = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Vê-se diretamente da definição de τ que τ_U não é sobrejetivo se $\{p, q\} \subset U$, pois a imagem nesse caso é o diagonal em $\mathcal{G}(U) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Calculamos agora os stalks \mathcal{F}_x e \mathcal{G}_x . Como as restrições de \mathcal{F} são a identidade, um germe é determinado simplesmente por um elemento $n \in \mathbb{Z}$; ou seja, $\mathcal{F}_x = \mathbb{Z}$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, temos que

$$\mathcal{G}_x = \begin{cases} 0 & \text{se } p \neq x \neq q \\ \mathbb{Z} & \text{se } x = p \text{ ou } x = q \end{cases}$$

De fato, dado um $x \in \mathbb{R} \setminus \{p, q\}$, podemos pegar uma vizinhança U suficientemente pequena tal que $U \cap \{p, q\} = \emptyset$ e restringir o germe a U . Como $\mathcal{G}(U) = 0$,

o germe tem que ser 0. Para um ponto $x \in \{p, q\}$, podemos escolher a vizinhança U de x tal que $|U \cap \{p, q\}| = 1$. Como as restrições a uma vizinhança mais pequena são todas identidade, um germe é dado por um elemento de $\mathcal{G}(U) = \mathbb{Z}$. Isto é, $\mathcal{G}_p = \mathcal{G}_q = \mathbb{Z}$.

O morfismo τ_x é igual a 0 se $x \notin \{p, q\}$, e é id se $x = p$ ou $x = q$. Portanto, τ é sobrejetivo como um morfismo de feixes mas o morfismo de seções induzido não é sobrejetivo.

6.2.4 Corolário. *Uma sequencia curta de feixes*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

é exata se e somente se a sequencia induzida nos stalks

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x \rightarrow 0$$

é exata.

6.2.5 Teorema. *Seja \mathcal{F} um subfeixe de \mathcal{G} . Então*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{G}/\mathcal{F} \rightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de feixes.

6.2.6 Corolário. *Temos uma sequência curta exata de feixes*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^* \xrightarrow{i} \mathcal{M}^* \xrightarrow{p} \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* \rightarrow 0,$$

onde i é a inclusão natural e p é o morfismo dado pela feixificação da projeção.

6.2.7 Corolário. *Para uma variedade complexa M , temos uma sequência curta exata de feixes*

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_V \xrightarrow{i} \mathcal{O}_M \xrightarrow{p} \mathcal{O}_M/\mathcal{I}_V \rightarrow 0,$$

onde i é inclusão de aplicações constantes, e p é a feixificação da projeção.

6.2.8 Teorema. *Para uma variedade complexa M , temos uma sequência curta exata de feixes*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_M \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_M^* \longrightarrow 0,$$

onde i é inclusão de aplicações constantes, e $\exp: f \mapsto e^{2\pi i f}$ é póscomposição pela aplicação exponencial.

6.3 Feixes localmente livres

6.3.1 DEFINIÇÃO. Um feixe \mathcal{F} numa variedade M é chamado de *livre* se $\mathcal{F} \cong \bigoplus_I \mathcal{O}$. Dizemos que $|I|$ é o *posto* de \mathcal{F} . Um feixe \mathcal{F} é chamado de *localmente livre* se existir uma cobertura $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ de M tal que $\mathcal{F}|_{U_i}$ é livre. Se M for conexa, o posto é constante e podemos definir o *posto* de \mathcal{F} como sendo o posto de $\mathcal{F}|_{U_i}$ para $i \in I$ qualquer.

6.3.2 Teorema. *Existe uma bijeção entre a classes de isomorfismo de feixes localmente livres de posto n e classes de isomorfismo de fibrados vetoriais de posto n .*

Demonstração. Seja $\pi: E \rightarrow B$ um fibrado vetorial holomorfo com fibra $F \cong \mathbb{C}^n$. Definimos o feixe do fibrado \mathcal{E} como sendo

$$\mathcal{E}(U) := \{s: U \rightarrow E \mid \pi \circ s = \text{id}, s \text{ holomorfa} \}$$

com as restrições dadas pelas restrições usuais de aplicações. Esse feixe é um feixe de espaços vetoriais (possivelmente de dimensão infinita). Ele também tem a estrutura de um \mathcal{O}_B -módulo.

Propriedade de colagem: dada uma família de abertos $\{U_i\}$ e seções $s_i \in \mathcal{E}(U_i)$ tais que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$, definimos $s \in \mathcal{E}(\bigcup_i U_i)$ como

$$s(x) = s_i(x) \quad \text{se } x \in U_i.$$

Essa seção s é bem-definida pois as seções s_i coincidem nas interseções. Pela definição s fica claro que $s|_{U_i} = s_i$. Ela também é holomorfa pois esta é uma propriedade local.

A propriedade de localidade: seja $s \in \mathcal{E}(U)$ uma seção tal que $s|_{U_i} = 0$ para uma cobertura $U = \bigcup_i U_i$. Uma seção $s|_V$ é zero se ela coincide com a seção zero em V . Então s coincide com a seção zero em cada aberto U_i . Como as restrições são as restrições usuais de aplicações, s coincide com a seção zero em U ; isto é, $0 = s \in \mathcal{E}(U)$.

Agora seja \mathcal{F} um feixe localmente trivial. Então existe uma cobertura $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ de M tal que $\varphi_i: \mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{O}|_{U_i}^r$. Pela eq. (6.1), temos agora um isomorfismo linear $(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_x: \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}^r$ e daí podemos definir as funções de transição

$$\begin{aligned} g_{ij}: U_i \cap U_j &\rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^r) \\ x &\mapsto (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_x. \end{aligned}$$

Verifica-se que $\{g_{ij} \mid i, j \in I\}$ são cociclos de Čech e, portanto, definem pelo Proposição 5.1.7 um fibrado holomorfo. \square

6.4 Feixes Coerentes

6.4.1 DEFINIÇÃO. Seja M uma variedade com feixe de estrutura \mathcal{O} , e \mathcal{F} um feixe de \mathcal{O} -módulos. Dizemos que \mathcal{F} é *(quasi)-coerente* se existir uma cobertura $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ e sequências exatas

$$\mathcal{O}^{\oplus J_i}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{O}^{\oplus K_i}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow 0,$$

onde J_i, K_i são (possivelmente in)finitos.

Capítulo 7

Divisores

7.1 Weil

7.1.1 DEFINIÇÃO. Seja M uma variedade complexa. Um *divisor de Weil* D em M é uma soma formal $D = \sum_i a_i D_i$ (localmente) finita onde $a_i \in \mathbb{Z}$ e cada D_i é uma subvariedade analítica irredutível de codimensão 1 de X .

Denotamos por Div o grupo abeliano de divisores.

7.1.2 Exemplo. Seja $0 \neq f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ uma função meromorfa em \mathbb{C} . Então uma subvariedade analítica irredutível de codimensão 1 é um ponto. A função f tem um número finito de zeros Z_i de ordem a_i e um número finito de polos P_i de ordem b_i . Então podemos definir o divisor $\text{div}(f) := \sum a_i Z_i - \sum b_i P_i$. Note que $f|_{Z_i} = 0$ e $f|_{P_i} = \infty$.

7.1.3 DEFINIÇÃO. Dadas uma variedade complexa M , uma aplicação holomorfa $f \in \mathcal{O}(M)$, e um divisor D , queremos definir um inteiro $\text{ord}_D(f)$ que generaliza Exemplo 7.1.2. Primeiro escolhemos um ponto $p \in D$ e uma aplicação g que defina D em volta de p . No anel local $\mathcal{O}_{M,p}$, existe um inteiro maximal $n \in \mathbb{N}$ tal que $f \in \langle g^n \rangle_{\mathcal{O}_{M,p}}$. Por [GH94, p.10, 2º Prop.], o inteiro n é independente da escolha de $p \in D$. Definimos $\text{ord}_D(f) := n$.

No caso que f seja meromorfa em M , podemos escrever f localmente em algum aberto U como $f = \frac{g}{h}$, onde g, h são holomorfas em U . Definimos $\text{ord}_D(f) := \text{ord}_D(g) - \text{ord}_D(h)$. Dizemos que f tem em zero de ordem $\text{ord}_D(g)$ e um polo de ordem $\text{ord}_D(h)$ ao longo de D .

O divisor da aplicação meromorfa f é definido como

$$\text{div}(f) := \sum_D \text{ord}_D(f) \cdot D,$$

onde a soma percorre sobre todos os divisores D de M . Escrevendo f localmente como $\frac{g}{h}$, definimos o *divisor de zeros* como $\text{div}_0(f) := \sum_D \text{ord}_D(g) \cdot D$, e *divisor de polos* como $\text{div}_\infty(f) := \sum_D \text{ord}_D(h) \cdot D$.

7.1.4 Exemplo. Seja $M = \mathbb{C}^3$ e $D = \mathcal{V}(g) \subset M$, onde $g = z_1 - z_2 \in \mathcal{O}$. Defina $f = (z_1 - z_2)^2 z_3^3 = g^2 z_3^3 \in \mathcal{O}$. Então $\text{ord}_D(f) = 2$.

7.1.5 *Exemplo.* Defina o divisor $D := \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ em \mathbb{C} . Então D é infinito mas localmente finito.

7.1.6 **DEFINIÇÃO.** Dizemos que dois divisores D_1, D_2 são equivalentes se $D_1 - D_2 = \text{div}(f)$ para alguma função racional f .

7.1.7 *Exemplo.* O divisor $D = 3p$ para $p \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ não corresponde a uma função racional porque toda função racional $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ com d zeros tem d polos [Ah78, p. 31].

7.1.8 *Exemplo (Blow-up de um ponto).* O blow-up de \mathbb{C}^2 na origem é

$$\tilde{\mathbb{C}}^2 = \{(z, \ell) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid z \in \ell\}.$$

O conjunto

$$D = \{(0, \ell) \in \tilde{\mathbb{C}}^2\}$$

é chamado de *divisor excepcional*.

7.1.9 *Exemplo.* Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação racional de superfícies complexas (lisas). Então f se escreve como uma composição de um número finito de blow-ups e blow-downs [GH94, Chapter 4].

7.2 Cartier

7.2.1 **DEFINIÇÃO.** Um *divisor de Cartier* é uma seção global do feixe $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$.

Capítulo 8

Cohomologias

8.1 Čech

8.1.1 DEFINIÇÃO (Cohomologia de Feixes). Dado um feixe de grupos abelianos \mathcal{F} definido sobre a variedade M e $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ uma cobertura localmente finita de M . Assumimos que I tem uma ordem total, e para um subconjunto $A \subset I$ escrevemos $U_A := \bigcap_{i \in A} U_i$.

Agora definimos os *grupos de cocadeias*

$$\begin{aligned} C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &:= \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \\ C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &:= \prod_{\substack{A \subset I \\ |A|=2}} \mathcal{F}(U_A) \\ &\vdots \\ C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &:= \prod_{\substack{A \subset I \\ |A|=p+1}} \mathcal{F}(U_A) \end{aligned}$$

Seja $\sigma \in C^{p-1}$. Então $\sigma = \prod_A \sigma^A$, onde $A \subset I$ percorre sobre todos os subconjuntos com p elementos e $\sigma^A \in \mathcal{F}(U_A)$. Note que para cada $i \in I \setminus A$, temos a restrição $(\sigma^A)|_{U_{A \cup \{i\}}} \in \mathcal{F}(U_{A \cup \{i\}})$.

Para definir o *cobordo*, queremos definir uma seção $\tau^B \in \mathcal{F}(U_B)$ para cada $B \subset I$ com $p+1$ elementos só usando as seções $\sigma^A \in \mathcal{F}(U_A)$ de σ . Como $B \setminus \{i\}$ tem p elementos para qualquer $i \in B$, definimos τ^B como sendo a soma alternada das seções $\sigma^{B \setminus \{i\}}$ restritas a U_B . Mais precisamente,

$$\begin{aligned} \delta: C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\rightarrow C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ \prod_{\substack{A \subset I \\ |A|=p}} \sigma^A &\mapsto \prod_{\substack{B \subset I \\ |B|=p+1}} \left(\sum_{k=0}^p (-1)^k \sigma^{B \setminus \{i_k\}} \Big|_{U_B} \right) \end{aligned}$$

onde i_k é o k -ésimo elemento de B .

Essa expressão é bem geral e vamos ver agora alguns casos particulares. Por exemplo, suponha que tenhamos uma cobertura $\mathcal{U} = \{U, V\}$. Então para $\sigma = (\sigma^U, \sigma^V) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, temos

$$\delta\sigma = \sigma^V - \sigma^U,$$

onde omitimos as restrições a $U \cap V$. Similarmente, para uma cobertura $\mathcal{U} = \{U, V, W\}$ e uma seção $\sigma = (\sigma^{U,V}, \sigma^{U,W}, \sigma^{V,W}) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, temos

$$\delta\sigma = \sigma^{V,W} - \sigma^{U,W} + \sigma^{U,V},$$

onde de novo omitimos as restrições a $U \cap V \cap W$.

8.1.2 Exemplo (Fibrados de posto 1). Seja L um fibrado vetorial holomorfa de posto (complexo) 1 e U, V, W abertos trivializantes para L . Temos as funções de transição $\{g_{UV}\}$ que satisfazem

$$\begin{aligned} g_{UV}(b) \cdot g_{VU}(b) &= 1 && \text{para } b \in U \cap V \\ g_{UV}(b) \cdot g_{VW}(b) \cdot g_{WU}(b) &= 1 && \text{para } b \in U \cap V \cap W \end{aligned}$$

para qualquer escolha de trivializações U, V, W . Note que $g_{UV}: U \cap V \rightarrow \mathbb{C}^*$ é holomorfa e assim defina uma seção em $\mathcal{O}^*(U \cap V)$. Reescrevendo as relações acima em termos de cocadeias (isto é, com notação aditiva), temos

$$\begin{aligned} g_{UV} + g_{VU} &= 0 && \text{em } U \cap V \\ g_{UV} + g_{VW} + g_{WU} &= 0 && \text{em } U \cap V \cap W. \end{aligned}$$

No caso em que M é coberto por U, V, W , temos que a seção $\sigma = (g_{UV}, g_{VW}, g_{WU})$ satisfaz $\delta\sigma = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \delta\sigma &= g_{VW} - g_{UW} + g_{UV} \\ &= g_{VW} - (g_{VW} + g_{UV}) + g_{UV} \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde omitimos as restrições a $U \cap V \cap W$.

8.1.3 Exercício. Mostre que o operador cobordo definido acima com respeito a qualquer cobertura \mathcal{U} e feixe \mathcal{F} satisfaz $\delta^2 = 0$.

8.1.4 DEFINIÇÃO. Seja δ o operador cobordo definido acima com respeito à cobertura \mathcal{U} e ao feixe \mathcal{F} . Então definimos o subgrupo dos *cociclos*

$$Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \ker \delta \subset C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Um cociclo $\sigma \in Z^p$ é dito *cobordo* se existir um $(p-1)$ -cadeia $\tau \in C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tal que $\delta\tau = \sigma$. Como $\delta^2 = 0$ qualquer elemento da forma $\delta\tau$ é um cociclo.

Aí definimos os grupos de cohomologia de Čech

$$H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \frac{Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})}{\delta C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})}$$

com respeito à cobertura \mathcal{U} e ao feixe \mathcal{F} .

8.2 Feixes

8.2.1 DEFINIÇÃO. Sejam $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ e $\mathcal{V} = \{V_j \mid j \in J\}$ duas coberturas. Dizemos que \mathcal{V} é um *refinamento* de \mathcal{U} se existir uma aplicação $r: J \rightarrow I$ tal que $V_j \subset U_{r(j)}$. Escrevemos $\mathcal{V} < \mathcal{U}$.

É possível que exista várias escolhas de r e queremos distinguir elas. Assim dizemos que o par (\mathcal{V}, r) é um refinamento de \mathcal{U} se \mathcal{V} é um refinamento de \mathcal{U} com r a aplicação dos índices como já definida acima.

8.2.2 Lema. *Seja \mathcal{U} uma cobertura e (\mathcal{V}, r) um refinamento de \mathcal{U} . Então existe um morfismo de complexos $\rho_r: C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F})$.*

Além disso, se (\mathcal{V}, r') também for um refinamento de \mathcal{U} , então existe uma homotopia de cadeias entre ρ_r e $\rho_{r'}$.

Demonstração. Para qualquer conjunto finito $B \subset J$, definimos $(-1)^{rB}$ como a paridade do conjunto rB na ordem de I ; ou seja,

$$(-1)^{rB} := \begin{cases} 1 & \text{se } rB \text{ é par} \\ -1 & \text{se } rB \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Defina

$$\rho_r: C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

$$\prod_{\substack{A \subset I \\ |A|=q+1}} \sigma^A \mapsto \prod_{\substack{B \subset J \\ |B|=q+1}} (-1)^{rB} \sigma^{rB} \Big|_{V_B},$$

onde colocamos $\sigma^{rB} := 0$ se rB não tiver $q+1$ elementos. Precisamos mostrar que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta} & C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ \rho_r \downarrow & & \downarrow \rho_r \\ C^{p-1}(\mathcal{V}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta} & C^p(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \end{array}$$

comuta para qualquer $p > 0$. É fácil verificar que para qualquer $\sigma \in C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$,

$$\delta \circ \rho_r(\sigma) = \prod_{\substack{B \subset J \\ |B|=p+1}} \sum_{k=0}^p (-1)^k (-1)^{r(B \setminus \{j_k\})} \sigma^{r(B \setminus \{j_k\})} \Big|_{V_B}; \text{ e}$$

$$\rho_r \circ \delta(\sigma) = \prod_{\substack{B \subset J \\ |B|=p+1}} (-1)^{rB} \sum_{k=0}^p (-1)^k \sigma^{rB \setminus \{i_k\}} \Big|_{V_B},$$

onde j_k é o k -ésimo elemento de B na ordem de J e i_k é o k -ésimo elemento de rB na ordem de I . Comutatividade segue da teoria geral de permutações, e em particular do fato que

$$(-1)^{R(N)} = (-1)^{R(N \setminus \{j\})} (-1)^{j-R(j)},$$

onde $N = \{j \in \mathbb{N} \mid j \leq p\}$ e $R: N \rightarrow N$ é uma permutação.

Agora, dadas duas aplicações $r, r': J \rightarrow I$ precisamos definir uma homotopia de cadeias; isto é, morfismos $h: C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{*+1}(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ tais que $\rho_r - \rho_{r'} = \delta \circ h + h \circ \delta$ para qualquer $p > 0$.

$$\begin{array}{ccccc}
 C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta} & C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & & \\
 & \searrow h & \downarrow \rho_r - \rho_{r'} & \searrow h & \\
 & & C^p(\mathcal{V}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta} & C^{p+1}(\mathcal{V}, \mathcal{F})
 \end{array}$$

□

8.2.3 DEFINIÇÃO. Sejam \mathcal{U}, \mathcal{V} duas coberturas tais que $\mathcal{V} < \mathcal{U}$. Então existe um homomorfismo

$$\rho_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} := \rho_r^*: H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^*(\mathcal{V}, \mathcal{F}),$$

que é independente da escolha de r pelo Lema 8.2.2.

8.2.4 Lema. O conjunto de coberturas é um conjunto dirigido, onde a ordem \leq é dada por $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ se $\mathcal{V} < \mathcal{U}$.

Demonstração. Precisamos mostrar que para quaisquer duas coberturas \mathcal{U}, \mathcal{V} , existe uma terceira \mathcal{W} que é um refinamento das outras. Defina $\mathcal{W} := \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$. Então \mathcal{W} é uma cobertura pois qualquer ponto tem uma vizinhança $U \in \mathcal{U}$ e uma vizinhança $V \in \mathcal{V}$. A cobertura \mathcal{W} é um refinamento pois $U \cap V \subset U$ e $U \cap V \subset V$ para qualquer elemento $U \cap V \in \mathcal{W}$. □

8.2.5 Lema. O conjunto de grupos de cohomologia de Čech $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ é um sistema dirigido de grupos abelianos indexado pelas coberturas.

Demonstração. Dadas duas coberturas \mathcal{V}, \mathcal{U} com $\mathcal{V} < \mathcal{U}$, temos o homomorfismo induzido $\rho_{\mathcal{V}, \mathcal{U}} := \rho_r^*: H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^*(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, que é independente da escolha de r .

Para qualquer cobertura \mathcal{U} , escolha $r = \text{id}: I \rightarrow I$. Então $\rho_{\mathcal{U}, \mathcal{U}} = \text{id}$.

Com três coberturas $\mathcal{W} < \mathcal{V} < \mathcal{U}$, é claro que $\rho_{\mathcal{U}, \mathcal{W}} = \rho_{\mathcal{V}, \mathcal{U}} \circ \rho_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}$, pois isto já acontece no nível de cocadeias; ou seja, $\rho_r \circ \rho_s = \rho_{s \circ r}$. □

8.2.6 DEFINIÇÃO. Definimos a cohomologia de M com coeficientes \mathcal{F} como o limite direto

$$H^n(M, \mathcal{F}) := \varinjlim H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}),$$

onde \mathcal{U} percorre sobre todas as coberturas de M .

8.2.7 Observação. Em geral, é muito difícil calcular esse limite direto e precisamos de um teorema que facilita os cálculos. Como descrito no Teorema 8.2.8, a cohomologia de uma cobertura acíclica é igual ao limite direto.

8.2.8 Teorema (do Leray [GH94, p. 40]). Seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ uma cobertura da variedade M que é acíclica no sentido que para todo $q > 0$ e todo $A \subset I$ finito,

$$H^q(U_A, \mathcal{F}) = 0.$$

Então $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong H^*(M, \mathcal{F})$.

8.2.9 Proposição. Seja \mathcal{F} um feixe sobre a variedade M . Então $H^0(M, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(M)$ é o conjunto de seções globais.

8.2.10 Proposição ([GH94, p. 46]). Para $q > 0$, temos $H^q(\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^*)^m, \mathcal{O}_{hol}) = 0$.

$$8.2.11 \text{ Teorema. } H^k(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n)) = \begin{cases} \mathbb{C}^{n+1} & \text{se } k = 0 \text{ e } n \geq 0 \\ \mathbb{C}^{-(n+1)} & \text{se } k = 1 \text{ e } n \leq -2. \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Demonstração. Usaremos a cobertura $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$, onde os abertos U_i são os abertos canônicos, com coordenadas

$$\begin{aligned} U_0 &= \{z\} \cong \mathbb{C} \\ U_1 &= \{\xi\} \cong \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Também temos que

$$U_0 \cap U_1 \cong \mathbb{C}^*$$

e nessa interseção, $z^{-1} = \xi$. Pelo Proposição 8.2.10 essa cobertura é acíclica e pelo Teorema 8.2.8 temos que $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{O}(n)) = H^*(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n))$.

Como a cobertura só tem dois abertos, $C^k(\mathcal{U}, \mathcal{O}(n)) = 0$ para $k \geq 2$ e daí que $H^k(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n)) = 0$ para $k \geq 2$.

Pelo Proposição 8.2.9, $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n)) = \mathcal{O}(n)(\mathbb{P}^1)$. Seja $f \in \mathcal{O}(n)(\mathbb{P}^1)$. Podemos escrever

$$f|_{U_0} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i.$$

Temos

$$f|_{U_1} = z^{-n} \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i-n} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \xi^{n-i}$$

e daí que $a_i = 0$ para $n - i < 0$. Se $n < 0$, isso significa que $f|_{U_1} \equiv 0$. Pelo Teorema 1.1.12, $f \equiv 0$ e $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n)) = 0$ para $n < 0$. Por outro lado, se $n \geq 0$, temos $n + 1$ escolhas livres $a_i \in \mathbb{C}$ para $i = 0, \dots, n$. Então $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(n)) = \mathbb{C}^{n+1}$ para $n \geq 0$.

Agora queremos calcular H^1 . Temos

$$C^0 = \mathcal{O}(n)(U_0) \times \mathcal{O}(n)(U_1)$$

$$C^1 = \mathcal{O}(n)(U_0 \cap U_1).$$

e

$$\begin{aligned} \delta: C^0 &\rightarrow C^1 \\ (f, g) &\mapsto f - z^n g. \end{aligned}$$

Como $C^2 = 0$, cada elemento de C^1 é um cociclo e só precisamos saber quais deles são cobordos. Sejam $f \in \mathcal{O}(n)(U_0)$, $g \in \mathcal{O}(n)(U_1)$ e escreva

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i \\ g &= - \sum_{j=0}^{\infty} c_j \xi^j = - \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^{-j} \end{aligned}$$

donde segue que

$$f - z^n g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i + z^n \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^{-j}.$$

Note que todas as potências z^k com $k \geq 0$ ou $k \leq n$ parecem nessa expressão. Portanto, os termos que não são cobordos são da forma $h = \sum_{k=1}^{-(n+1)} a_k z^k$ que é não zero se e somente se $n \leq -2$. \square

8.2.12 Teorema. $\dim H^1(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \mathcal{O}_{hol}) = \infty$.

Demonstração. Defina

$$U := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \mid z_1 \neq 0\}$$

e

$$V := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \mid z_2 \neq 0\}.$$

Então $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} = U \cup V$. Como $U \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, $V \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, e $U \cap V \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, pelo Proposição 8.2.10 essa cobertura é acíclica. Portanto, pelo Teorema 8.2.8 $H^*(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \mathcal{O}) = H^*(\{U, V\}, \mathcal{O})$.

Agora calculamos $H^1(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \mathcal{O})$. Seja σ uma 1-cocadeia em M . Então $\sigma \in \mathcal{O}(U \cap V)$ é um 1-cociclo pois não temos interseções triplas. Como σ está definida em $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, ela é da forma

$$\sigma = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sigma_{ij} z_1^i z_2^j.$$

Os cobordos são da forma

$$\alpha_U = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_{ij} z_1^i z_2^j$$

em U , e da forma

$$\beta_V = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{ij} z_1^i z_2^j$$

em V . Aí $\sigma \sim \sigma - \alpha_U - \beta_V$ e os cociclos da forma

$$\sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{i=-\infty}^{-1} a_{ij} z_1^i z_2^j$$

são representantes de classes de equivalência distintos. Portanto $\dim H^1(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \mathcal{O}) = \infty$. \square

8.3 Dolbeaux

8.3.1 DEFINIÇÃO. Seja M uma variedade complexa de dimensão complexa n . Definimos o fibrado

$$\Omega^p(M, \mathbb{R}) := (T_{\mathbb{R}}^* M)^{\wedge p}$$

cujas seções são as formas diferenciais em M de grau p . As fibras são dadas por

$$\langle dx_I \wedge dy_J \mid |I| + |J| = p \rangle_{\mathbb{R}},$$

onde usamos a notação de multi-índices. Temos o operador cobordo δ

$$\begin{aligned} d: \Omega^p(M) &\rightarrow \Omega^{p+1}(M) \\ \sum_{|I|+|J|=p} f_{I,J} dx_I \wedge dy_J &\mapsto \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ |I|+|J|=p}} \frac{\partial f_{I,J}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \wedge dy_J \\ &+ \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ |I|+|J|=p}} \frac{\partial f_{I,J}}{\partial y_i} dy_i \wedge dx_I \wedge dy_J, \end{aligned}$$

onde escrevemos as formas localmente. Esse operador satisfaz $\delta^2 = 0$, e assim define uma cohomologia chamado de *cohomologia de de Rham*, que é denotada por $H_{\text{dR}}^*(M, \mathbb{R})$.

Podemos complexificar o fibrado $\Omega^p(M, \mathbb{R})$ para obter

$$\Omega^p(M) := (T_{\mathbb{C}}^* M)^{\wedge p},$$

o fibrado das formas diferenciais complexas de grau p . As fibras são dadas por

$$\langle dz_I \wedge d\bar{z}_J \mid |I| + |J| = p \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Ainda temos um operador cobordo

$$\begin{aligned} d: \Omega^p(M) &\rightarrow \Omega^{p+1}(M) \\ \sum_{|I|+|J|=p} f_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J &\mapsto \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ |I|+|J|=p}} \frac{\partial f_{I,J}}{\partial z_i} dz_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \\ &\quad + \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ |I|+|J|=p}} \frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J, \end{aligned}$$

onde de novo escrevemos as formas localmente. Como no caso real, $\delta^2 = 0$ e essa cohomologia de Rham com coeficientes complexos é denotada por $H_{\text{dR}}^*(M)$.

Como $T_{\mathbb{C}}^*M = T^{*1,0}M \oplus T^{*0,1}M$, temos

$$\Omega^k(M) = \bigoplus_{p+q=k} \left((T^{*1,0}M)^{\wedge p} \wedge (T^{*0,1}M)^{\wedge q} \right).$$

Defina as formas de tipo (p, q) por

$$\Omega^{(p,q)}(M) := (T^{*1,0}M)^{\wedge p} \wedge (T^{*0,1}M)^{\wedge q}$$

que são as imagens das formas pelas projeções naturais $\pi^{(p,q)}: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{(p,q)}(M)$, onde $p+q=k$. Note que para $\omega \in \Omega^{(p,q)}(M)$, vale $d\omega \in \Omega^{(p+1,q)}(M) \oplus \Omega^{(p,q+1)}(M)$. Assim, com

$$\begin{aligned} \partial &:= \pi^{(p+1,q)} \circ d \\ \bar{\partial} &:= \pi^{(p,q+1)} \circ d, \end{aligned}$$

vale $d = \partial + \bar{\partial}$. Além disso, $0 = d^2 = \partial^2 + \bar{\partial}^2 + \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial$. Pela definição das projeções, valem

$$\begin{aligned} \partial \circ \bar{\partial} &= 0 \\ \bar{\partial} \circ \partial &= 0. \end{aligned}$$

Então $\partial^2 = -\bar{\partial}^2$. Mas as imagens de ∂ e $\bar{\partial}$ são distintas, e daí que

$$\begin{aligned} \partial^2 &= 0 \\ \bar{\partial}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, ∂ e $\bar{\partial}$ são operadores cobordos. A cohomologia definida por $\bar{\partial}$ é chamada de *cohomologia de Dolbeaux* e é denotada por $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$.

8.3.2 TEOREMA ([GH94, p.45]). *Seja M uma variedade complexa. Então $H^q(M, \Omega^p(M)) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$.*

8.4 Relações entre as Cohomologias

8.4.1 Teorema.

$$H_{simp}^*(M, \mathbb{Z}) \cong \check{H}^*(M, \mathbb{Z})$$

8.4.2 Teorema.

$$H_{simp}^*(M, \mathbb{R}) = H_{sing}^*(M, \mathbb{R}) = H_{dR}^*(M, \mathbb{R}) = \check{H}^*(M, \mathbb{R})$$

8.4.3 Teorema.

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) = \check{H}^q(M, \Omega^p)$$

8.5 Pic e Div

8.5.1 Teorema. *O grupo de Picard $\text{Pic}(M)$ é isomorfo ao $H^1(M, \mathcal{O}^*)$, para uma variedade complexa M qualquer.*

Capítulo 9

Classes Características

[MS74]

9.1 Classe de Euler

9.1.1 DEFINIÇÃO. A *classe de Euler* associa a cada fibrado vetorial orientado um elemento na cohomologia da base $H^p(B; \mathbb{Z})$, onde p é o posto do fibrado, de tal maneira que satisfaz as seguintes condições:

- *funtorialidade*: dado um morfismo de fibrados vetoriais orientados $\varphi: \eta \rightarrow \xi$, temos que

$$e(\eta) = \varphi^* e(\xi);$$

- *fórmula da soma de Whitney*: dados dois fibrados vetoriais orientados ξ, η , temos

$$e(\xi \oplus \eta) = e(\xi) \smile e(\eta);$$

- *normalização*: se ξ possui uma seção sem zeros, então $e(\xi) = 0$; e
- *orientação*: com ξ^{op} o fibrado com a orientação oposta de ξ , então

$$e(\xi^{\text{op}}) = -e(\xi).$$

9.1.2 Exemplo. $e(TM) = \chi(M)$.

9.2 Classe de Chern

9.2.1 DEFINIÇÃO (Axiomas de Eilenberg-Steenrod). A *classe de Chern* c_k associa a cada fibrado vetorial complexo um elemento na cohomologia da base $H^{2k}(B; \mathbb{R})$ de tal maneira que satisfaz as seguintes condições:

- $c_0 = 1$;

- *funtorialidade*: dado um morfismo de fibrados vetoriais complexos $\varphi: \eta \rightarrow \xi$, temos que

$$c_k(\eta) = \varphi^* c(\xi);$$

- *fórmula da soma de Whitney*: dados dois fibrados vetoriais complexos ξ, η , temos

$$c_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^k c_{k-i}(\xi) \smile c_i(\eta)$$

- *normalização*: $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = 1$.

A classe de Chern total ou polinômio de Chern é

$$c(\xi) := \sum_{k=0}^n c_k(\xi)t,$$

onde $\xi: E \rightarrow B$ é um fibrado vetorial complexo sobre uma variedade B e $n = \min\{\dim_{\mathbb{C}} M, \text{rank } \xi\}$.

9.2.2 Exemplo. O polinômio de Chern de um fibrado trivial é 1. Isso segue de funtorialidade e do fato de que o fibrado trivial sobre M é o pullback do fibrado trivial sobre um ponto.

9.2.3 Lema. $c(\xi_1 \oplus \xi_2) = c(\xi_1) \cdot c(\xi_2)$.

9.2.4 Proposição. *[Pra] Seja $X := \mathcal{V}(f_1, \dots, f_k) \subset \mathbb{P}^{n+k}$ uma interseção completa e $i: X \rightarrow \mathbb{P}^{n+k}$ a inclusão. Defina $\alpha := i^*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+k}}(1))) \in H^2(X)$. Então*

$$\int_X \alpha^{n+k} = d, \quad (9.1)$$

onde $d = \prod_1^k d_i$ e $d_i = \deg f_i$.

Além disso,

$$c(X) = \frac{(1 + \alpha)^{n+k+1}}{\prod_i (1 + d_i \alpha)} = 1 + c_1(X) + \dots + c_n(X), \quad (9.2)$$

e a característica de Euler é dada por

$$\chi(X) = \int_X c_n(X), \quad (9.3)$$

onde $c_i(X) \in H^{2i}(X)$ é a i -ésima classe de Chern.

9.2.5 Exemplo. Temos o mergulho de \mathbb{P}^1 em \mathbb{P}^2 dado por

$$\begin{aligned} f: \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ [u, v] &\mapsto [u, v, 0]. \end{aligned}$$

A imagem de f é a variedade projetiva em \mathbb{P}^2 dada por $X_{1,1} := \mathcal{V}(z)$, onde usamos as coordenadas homogêneas $[x, y, z]$ em \mathbb{P}^2 . Então $X_{1,1}$ é definido por um polinômio de grau 1.

Aplicando eq. (9.2) no polinômio de Chern dá

$$c(X_{1,1}) = \frac{(1 + \alpha)^3}{1 + \alpha} = (1 + \alpha)^2 = 1 + 2\alpha,$$

pois $\alpha^2 \in H^4(\mathbb{P}^1) = 0$. A classe de Euler $e(X_{1,1})$ é a classe de Chern top $c_1(X_{1,1}) = 2\alpha$. Da eq. (9.3), vemos que a característica de Euler de $X_{1,1}$ é dada por integrar a classe de Chern top sobre $X_{1,1}$; ou seja,

$$\chi(X_{1,1}) = \int_{X_{1,1}} 2\alpha.$$

Agora podemos aplicar eq. (9.1) para obter a identidade

$$\int_{X_{1,1}} \alpha = 1.$$

Portanto,

$$\chi(X_{1,1}) = 2 \int_{X_{1,1}} \alpha = 2. \quad (9.4)$$

9.2.6 Exemplo. Considere o mergulho de Veronese

$$\begin{aligned} g: \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ [u, v] &\mapsto [u^2, uv, v^2]. \end{aligned}$$

A imagem de g é a variedade projetiva $X_{1,2} := \mathcal{V}(y^2 - xz) \subset \mathbb{P}^2$, onde usamos as coordenadas homogêneas $[x, y, z]$ em \mathbb{P}^2 . Portanto, $X_{1,2}$ é definido por um polinômio de grau 2.

Aplicando eq. (9.2), vemos que

$$c(X_{1,2}) = \frac{(1 + \alpha)^3}{1 + 2\alpha} = 1 + \alpha,$$

pois $\alpha^k \in H^{2k}(\mathbb{P}^1) = 0$ for $k > 1$. Portanto, a classe de Euler é $e(X_{1,2}) = c_1(X_{1,2}) = \alpha$. Integrando a classe de Euler dá a característica de Euler

$$\chi(X_{1,2}) = \int_{X_{1,2}} \alpha.$$

Agora, eq. (9.1) mostra que

$$\int_{X_{1,2}} \alpha = 2.$$

Portanto,

$$\chi(X_{1,2}) = \int_{X_{1,2}} \alpha = 2.$$

9.2.7 *Exemplo.* Considere o mergulho de Segre

$$\begin{aligned} f: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^3 \\ ([x_0, x_1], [y_0, y_1]) &\mapsto [x_0 y_0, x_0 y_1, x_1 y_0, x_1 y_1]. \end{aligned}$$

A imagem de f é uma variedade projetiva em \mathbb{P}^3 dada por $X_{2,2} := \mathcal{V}(z_0 z_3 - z_1 z_2)$, onde usamos as coordenadas homogêneas $[z_0, z_1, z_2, z_3]$ on \mathbb{P}^3 . Daí que $X_{2,2}$ é definido por um polinômio de grau 2.

Equation (9.2) dá

$$c(X_{2,2}) = \frac{(1 + \alpha)^4}{1 + 2\alpha} = 1 + 2\alpha + 2\alpha^2$$

pois $\alpha^k \in H^{2k}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = 0$ para $k > 2$. Portanto, a classe de Euler é $e(X_{2,2}) = c_2(X_{2,2}) = 2\alpha^2$. A característica de Euler é dada por integrar a classe de Euler:

$$\chi(X_{2,2}) = \int_{X_{2,2}} 2\alpha^2.$$

Aplicando eq. (9.1) mostra que

$$\int_{X_{2,2}} \alpha^2 = 2.$$

Portanto,

$$\chi(X_{2,2}) = 2 \int_{X_{2,2}} \alpha^2 = 4.$$

Capítulo 10

Teoria de Gauge

10.1 Fibrados Principais

10.1.1 DEFINIÇÃO. Um *fibrado principal* é uma ação livre à direita $\alpha: G \times P \rightarrow P$ em uma variedade suave P por um grupo de Lie G tal que

- o quociente $M := P/G$ é uma variedade suave e a projeção quociente $\pi: P \rightarrow M$ é uma aplicação suave;
- existirem uma vizinhança U em volta de cada ponto $x \in M$ e um difeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi_U: \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times G \\ p &= (\pi(p), \gamma_U(p)), \end{aligned}$$

onde $\gamma_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow G$ é uma aplicação equivariante, tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & U \times G \\ \downarrow \pi & \searrow \text{pr}_U & \\ U & & \end{array}$$

comuta.

A variedade P é chamada de *espaço total*, B de *espaço de base*, G de *grupo estrutural*, π de *projeção*, φ_U de *trivialização local*. Em cada trivialização, podemos munir as fibras $\pi^{-1}(x)$ com a estrutura de grupo de tal maneira que seja isomorfo ao grupo G (como grupo de Lie).

Se existir uma trivialização global $\varphi_M: P \rightarrow M \times G$, então o fibrado principal se chama *trivial*.

Note que temos uma seção local distinta

$$\begin{aligned} s_U: U &\rightarrow \pi^{-1}(U) \\ x &\mapsto \psi_U^{-1}(x, 1), \end{aligned}$$

onde 1 é o elemento neutro do grupo G . Então, definindo $g_U := \gamma_U \circ s_U$, temos as funções de transição g_{UV}

$$\begin{aligned} g_{UV}: U \cap V &\rightarrow G \\ x &\mapsto g_U(x) \cdot g_V(x)^{-1}, \end{aligned}$$

onde a inversa é a do grupo e não é a pré-imagem.

10.1.2 Lema. *As funções de transição de um fibrado principal são cociclos de Čech.*

10.1.3 Proposição. *Seja M uma variedade suave com uma cobertura aberta \mathcal{U} . Dado um grupo G , e aplicações $\{g_{UV}: U \cap V \rightarrow G \mid U, V \in \mathcal{U}\}$ que são cociclos de Čech, existe um único fibrado principal $\pi: P \rightarrow M$ com grupo estrutural G e funções de transição $\{g_{UV} \mid U, V \in \mathcal{U}\}$.*

10.1.4 Corolário. *Existe uma bijeção entre fibrados principais com grupo estrutural $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ com os fibrados vetoriais de posto k .*

10.1.5 Exemplo (Fibrado Referencial). Seja $\pi: E \rightarrow M$ um fibrado vetorial de posto k sobre M . Como as funções de transição são aplicações sobre o grupo $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$, por Proposição 10.1.3 existe um único fibrado principal $P \rightarrow M$ com grupo estrutural $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ e as mesmas funções de transição.

10.1.6 Proposição. *Seja $\pi: P \rightarrow M$ um fibrado principal e $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ uma representação do grupo estrutural. Então*

$$\begin{aligned} (P \times V) \times G &\rightarrow P \times V \\ (p, v) \cdot g &\mapsto (pg, \rho(g^{-1})v) \end{aligned}$$

é uma ação livre. Definindo $P \times_\rho V := P \times V / G$, a projeção induzida

$$\begin{aligned} \pi_\rho: P \times_\rho V &\rightarrow M \\ [p, v] &\mapsto \pi(p) \end{aligned}$$

é bem definida e é um fibrado vetorial sobre M com fibra V .

10.1.7 Exercício. Seja $\{g_{UV}: U \cap V \rightarrow G \mid U, V \in \mathcal{U}\}$ as funções de transição do fibrado principal P . Mostre que $P \times_\rho V$ é o fibrado vetorial com funções de transição $\rho \circ g_{UV}: U \cap V \subset M \rightarrow \mathrm{GL}(V)$.

10.1.8 DEFINIÇÃO. Dado um fibrado principal $\pi: P \rightarrow M$, uma seção é uma aplicação $s: U \subset M \rightarrow P$ tal que $\pi \circ s = \mathrm{id}$.

10.1.9 Proposição. *Um fibrado principal $\pi: P \rightarrow M$ é trivial se e somente se existe uma seção global.*

10.2 Conexões

10.2.1 DEFINIÇÃO. Dado um fibrado principal $\pi: P \rightarrow M$, uma *conexão* é uma escolha suave de subespaço $H_p \subset T_p P$ para cada $p \in P$ tal que

- $d\pi_p: H_p \rightarrow T_{\pi(p)}M$ é um isomorfismo; e
- $(dD_g)_p(H_p) = H_{pg}$.

Queremos dizer por “escolha suave” que existe uma vizinhança U em volta de cada p e campos suaves X_1, \dots, X_k definidos em U tais que $H_p = \text{span}\{X_1(p), \dots, X_k(p)\}$ para cada $p \in U$.

O espaço H_p é chamado de *espaço horizontal* e $V_p := \ker(d\pi)_p$ de *espaço vertical*. Note que $T_p P = V_p \oplus H_p$ para cada $p \in P$, $\dim H_p = \dim M$, e $\dim V_p = \dim G$.

Dado um campo X em P , podemos decompor ele em partes verticais e horizontais. Assim, $X = X^H + X^V$, onde X^H e X^V são campos horizontais e verticais, respectivamente.

10.2.2 DEFINIÇÃO. Uma *1-forma de conexão* para um fibrado principal $\pi: P \rightarrow M$ é uma 1-forma ω em P com valores em \mathfrak{g} (isto é, $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$) tal que

- Para cada $X \in \mathfrak{g}$, temos $\omega\sigma(X) := X$, onde

$$\sigma_p(X) := \left. \frac{d}{dt} p \cdot \exp(tX) \right|_{t=0};$$

- $D_g^* \omega = \text{Ad}_{g^{-1}} \omega$ para qualquer $g \in G$.

10.2.3 DEFINIÇÃO. Um *campo de gauge* A é uma coleção de 1-formas $A_U \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$, $U \subset M$, tal que

$$A_U = \text{Ad}_{g_{UV}} \circ A_V + g_{VU}^* \theta \quad (10.1)$$

nas interseções $\emptyset \neq U \cap V \subset M$.

10.2.4 Proposição. *Seja P um fibrado principal. Então uma conexão, uma 1-forma de conexão, e um campo de gauge são dados equivalentes.*

10.3 Curvatura

10.4 Transformação de Gauge

Capítulo 11

Deformações Infinitesimais

[Kod05]

11.1 Famílias Diferenciáveis

Seja M^m uma variedade complexa. Dada uma cobertura por cartas holomorfas $\{U_i \subset \mathbb{C}^m \mid i \in I\}$, escrevemos as coordenadas em U_i como $z_i = (z_i^1, \dots, z_i^m)$, e temos o conjunto de funções de transição $\{g_{ij}: U_j \rightarrow U_i \mid i, j \in I\}$. Assim, M pode ser escrita como

$$M = \bigcup_I U_i / \sim$$

onde identificamos $z_i \in U_i$ com $z_j \in U_j$ se $z_i = g_{ij}(z_j)$.

Para “diferenciar” a estrutura complexa de M , adicionamos parâmetros diferenciáveis $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ às funções de transição

$$\begin{aligned} f_{ij}: U_j \times \mathbb{R}^n &\rightarrow U_i \\ (z_j, t) &= f_{ij}(z_j, t) \\ (z_j, 0) &= g_{ij}(z_j) \end{aligned}$$

onde f_{ij} são holomorfas nas primeiras m coordenadas e suave nas últimas n coordenadas. Para cada $t \in \mathbb{R}^n$ fixo, as funções $\{f_{ij} \mid i, j \in I\}$ são funções de transição; isto é, temos uma variedade M_t dada por

$$M_t = \bigcup_I U_i / \sim$$

onde identificamos $z_i \in U_i$ com $z_j \in U_j$ se $z_i = f_{ij}(z_j, t)$. Note que $M_0 = M$.

11.1.1 DEFINIÇÃO. Um *família diferenciável de variedades complexas* parametrizada por um domínio $B \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade suave \mathcal{M} com uma aplicação suave $\omega: \mathcal{M} \rightarrow B$ tal que

- o posto do Jacobiano $d\omega$ é n em cada ponto de \mathcal{M} ;

- para cada $t \in B$, a fibra $\omega^{-1}(t)$ é um subconjunto conexo compacto de \mathcal{M} ;
- as fibras $M_t^m := \omega^{-1}(t)$ são variedades complexas compactas para cada $t \in B$;
- existem uma cobertura localmente finita $\{\mathcal{U}_i \mid i \in I\}$ e aplicações suaves $z_j: \mathcal{U}_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que para cada t os conjuntos

$$\left\{ z_j: p \mapsto (z_j^1(p), \dots, z_j^n(p)) \mid \mathcal{U}_j \cap \omega^{-1}(t) \neq \emptyset \right\}$$

formam um sistema de coordenadas locais de M_t .

Denotamos por (\mathcal{M}, B, ω) essa família.

Escrevendo as partes reais e imaginárias $z_j^\alpha(p) = x_j^{2\alpha-1}(p) + ix_j^{2\alpha}$, e definindo

$$\begin{aligned} x_j: \mathcal{U}_j &\rightarrow \mathbb{R}^{2m} \times B \\ p &\mapsto (x_j^1(p), \dots, x_j^{2n}(p), t_1, \dots, t_n), \\ \omega(p) &= (t_1, \dots, t_n), \end{aligned}$$

obtemos um sistema de coordenadas locais suaves de \mathcal{M} . Usando coordenadas complexas em \mathbb{R}^{2m} via $(z^1, \dots, z^m) = (x^1 + ix^2, \dots, x^{2m-1} + ix^{2m})$, reescrevemos x_j como

$$\begin{aligned} x_j: \mathcal{U}_j &\rightarrow \mathbb{C}^m \times B \\ p &\mapsto (z_j(p), \omega(p)). \end{aligned}$$

Como a mudança de coordenadas em \mathcal{M} não muda o variável t , as funções de transição $x_k(p) \mapsto x_j(p)$ (para $\mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$) se escrevem como

$$\begin{aligned} f_{jk}: \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k &\rightarrow \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k \\ (z_k(p), t) &\mapsto (z_j(p), t) \\ t &= \omega(p) \end{aligned}$$

Como $z_k(p) \mapsto z_j(p)$ são mudanças de coordenadas biholomorfas em $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k \cap \omega^{-1}(t) \neq \emptyset$, sabemos que as aplicações f_{jk} são holomorfas em z_k^1, \dots, z_k^m .

11.1.2 DEFINIÇÃO. Duas famílias diferenciáveis (\mathcal{M}, B, ω) e (\mathcal{N}, B, π) sobre a mesma base B são ditas *equivalentes* se existir um difeomorfismo $\Phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ tal que para cada $t \in B$, $\Phi(M_t) = N_t$ e $\Phi|_{M_t}: M_t \rightarrow N_t$ é biholomorfa.

A família (\mathcal{M}, B, ω) é chamada de *trivial* se ela for equivalente á família $(M \times B, B, \pi)$, onde $M = \omega^{-1}(t^0)$ para algum $t^0 \in B$.

A família (\mathcal{M}, B, ω) é chamada de *localmente trivial* se, para cada $t \in B$, existe um subdomínio $I \subset B$ tal que a família $(\mathcal{M}_I, I, \omega|_I)$ é trivial.

Dizemos que a estrutura complexa de M_t da família diferenciável (\mathcal{M}, B, ω) não depende de t se essa família for localmente trivial.

11.2 Deformação infinitesimal

Agora precisamos entender o que significa a dizer que M_t depende de t , e queremos achar uma caracterização em termos das funções de transição $\{f_{ij} \mid i, j \in I\}$. As componentes f_{ik}^α de $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$ se escrevem como

$$f_{ik}^\alpha(z_k, t) = f_{ij}^\alpha\left(f_{jk}^1(z_k, t), \dots, f_{jk}^m(z_k, t)\right), \quad \alpha = 1, \dots, m.$$

Colocando $z_j^\beta = f_{jk}^\beta(z_k, t)$, obtemos

$$\frac{\partial f_{ik}^\alpha(z_k, t)}{\partial t} = \frac{\partial f_{ij}^\alpha(z_j, t)}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial f_{ij}^\alpha(z_k, t)}{\partial z_j^\beta} \frac{\partial f_{jk}^\beta(z_k, t)}{\partial t}.$$

Por colocar $z_i^\alpha = f_{ij}^\alpha(z_j, t)$, reescrevemos isso como

$$\frac{\partial f_{ik}^\alpha(z_k, t)}{\partial t} = \frac{\partial f_{ij}^\alpha(z_j, t)}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial z_i^\alpha}{\partial z_j^\beta} \frac{\partial f_{jk}^\beta(z_k, t)}{\partial t}.$$

Usando campos holomorfos, essa expressão se reescreve de novo como

$$\frac{\partial f_{ik}^\alpha(z_k, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial f_{ij}^\alpha(z_j, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} + \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial f_{jk}^\beta(z_k, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_j^\beta},$$

onde utilizamos a identidade

$$\frac{\partial}{\partial z_j^\beta} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial z_i^\alpha}{\partial z_j^\beta} \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}.$$

Para simplificar a notação, introduzimos os campos de vetores

$$\theta_{jk}(t) := \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial f_{jk}^\alpha(z_k, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha},$$

e então

$$\begin{aligned} \theta_{ik}(t) &= \theta_{ij}(t) + \theta_{jk}(t) \\ \theta_{kj}(t) &= -\theta_{jk}(t). \end{aligned} \tag{11.1}$$

Resumindo, em cada interseção $U_j \cap U_k$ de $M_t = \bigcup_I U_i$ definimos um campo holomorfo θ_{jk} que satisfaz eq. (11.1) em $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, a condição de cociclo de Čech. Portanto, temos um elemento

$$\theta(t) := (\theta_{jk})_I \in H^1(\mathfrak{U}_t, \Theta_t),$$

onde \mathcal{U}_t é a cobertura $\{U_i \mid i \in I\}$ de $M_t = \bigcup_I U_i$ e Θ_t é o feixe de campos holomorfos de M_t . O grupo $H^1(\mathcal{U}_t, \Theta_t)$ é um subgrupo de $H^1(M_t, \Theta_t)$, e assim consideramos $\theta(t)$ como um elemento de $H^1(M_t, \Theta_t)$. A classe $\theta(t)$ é chamada da *deformação infinitesimal de M_t* e representa, em algum sentido, a derivada da estrutura complexa de M_t . Escrevemos ela como

$$\frac{\partial M_t}{\partial t} := \theta(t) \in H^1(M_t, \Theta_t).$$

Mostramos agora que $\theta(t)$ não depende da escolha dos sistemas de coordenadas locais.

11.3 Dependência do Parâmetro

11.3.1 Teorema. *Se $\dim H^1(M_t, \Theta_t)$ é independente de $t \in I$, então podemos escolher um 0-cocadeia $(\theta_j(t))_I$ com $\delta(\theta_j(t))_I = (\theta_{jk}(t))_I$ tal que cada $\theta_j^\alpha(z_k, t)$ é uma aplicação de classe C^∞ de z_j^1, \dots, z_j^m, t , onde colocamos $\theta_j(t) = \sum_{\alpha=1}^m \theta_j^\alpha(z_k, t) \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}$.*

11.3.2 Teorema. *Se $\dim H^1(M_t, \Theta_t)$ é independente de $t \in I$ e $\theta(t) \equiv 0$ identicamente, então (\mathcal{M}, B, ω) é localmente trivial.*

11.3.3 Teorema. *Se $\dim H^1(M_t, \Theta_t)$ é independente de $t \in I$ e $\rho_t \equiv 0$ identicamente, então a família (\mathcal{M}, B, ω) é localmente trivial.*

11.3.4 Teorema. *Seja (\mathcal{M}, B, ω) uma família diferenciável e $M_t := \omega^{-1}(t)$. Então $\dim H^1(M_t, \Theta_t)$ é superiormente semi-contínua.*

11.3.5 Teorema. *Seja (\mathcal{M}, B, ω) uma família diferenciável de variedades complexas compactas, onde B é um domínio de \mathbb{R}^n com $0 \in B$. Se $H^1(M_0, \Theta_0) = 0$, então existe uma vizinhança $I \subset B$ de 0 onde $(\mathcal{M}_I, I, \omega|_I)$ é trivial.*

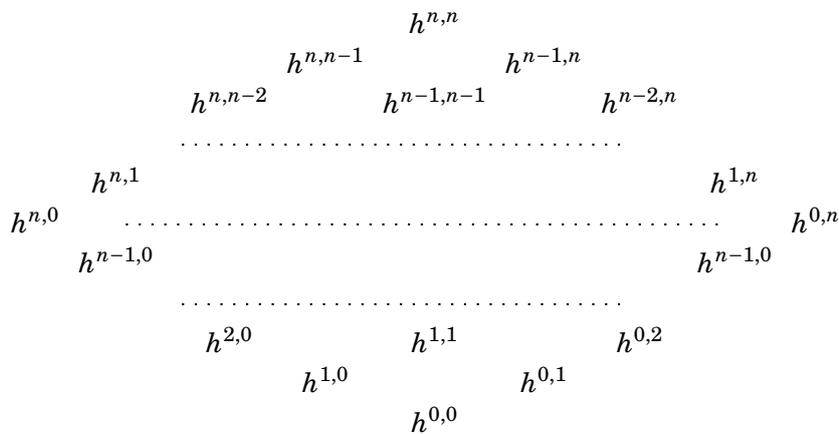
Capítulo 12

Simetria do Espelho

12.1 Diamantes de Hodge

12.1.1 DEFINIÇÃO. Uma variedade complexa compacta é dita *Calabi–Yau* se o feixe canônico K_X for trivial; ou seja, $K_X = \mathcal{O}_X$.

12.1.2 DEFINIÇÃO. Dada uma variedade complexa compacta M , sua *diamante de Hodge* é o diagrama



12.1.3 Teorema (Simetrias clássicas).

12.1.4 Conjetura. Dada X existe \tilde{X} tal que o diamante de Hodge de \tilde{X} é obtido do diamante de Hodge de X por reflexão na reta diagonal $\pi/4$.

12.1.5 DEFINIÇÃO. Seja E um fibrado vetorial e \mathcal{A}^p o feixe de p -formas diferenciáveis com valores em E ; ou seja, seções do fibrado $(T^*M \otimes_{\mathcal{O}(M)} E)^{\wedge p}$. Uma conexão D em E é um operador

$$D: \mathcal{A}^0(E) \rightarrow \mathcal{A}^1(E)$$

que satisfaz a regra de Leibniz

$$D(f\xi) = df \otimes \xi + f \cdot D\xi.$$

O operador D se estende para p -formas

$$D: \mathcal{A}^p(E) \rightarrow \mathcal{A}^{p+1}(E).$$

O operador de curvatura é D^2 .

12.1.6 Teorema (Fórmula de Adjunção). *seja X uma variedade lisa, $\iota: Y \rightarrow X$ uma subvariedade lisa. Então a sequência*

$$0 \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \rightarrow \iota^* \Omega_X \rightarrow \Omega_Y \rightarrow 0$$

é exata. Além disso, $K_Y = \iota^* K_X \otimes \det(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\vee$, onde K é o fibrado canônico.

Seja D um divisor em X , com D liso. Então o fibrado normal de D em X estende a um fibrado $\mathcal{O}(D)$ em X , que satisfaz $\mathcal{O}_X(D)|_D = \nu(D)$, onde ν é o fibrado cotangente. Neste caso o fibrado conormal $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ é $\iota^* \mathcal{O}(-D)$, $K_D = \iota^*(K_X \otimes \mathcal{O}(D))$.

12.1.7 Exemplo. $\tilde{\mathbb{C}}^2 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) = U \cup V$, $U = \{(z, u)\}$, $V = \{\xi, v\}$, $U \cap V = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, onde $(\xi, v) = (z^{-1}, zu)$. $\mathcal{I}_Y = \{u = 0\}$ em U . $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 = \langle u \rangle / \langle u^2 \rangle$ é a primeira vizinhança infinitesimal de Y .

12.1.8 Exemplo. A variedade $W_k := \text{Tot}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-k-2))$ é uma Calabi–Yau 3-fold. $K_Y = \iota^* K_X \otimes \det(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\vee$,

$$\nu = \begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z^{k+2} \end{pmatrix}$$

é o fibrado normal. O determinante é z^2 . Então $\det(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\vee = \mathcal{O}(-2)$, $K_Y = \mathcal{O}(-2)$, e portanto $\iota^* K_X = \mathcal{O}$.

12.2 Simetria do Espelho Homológica

Apêndice A

Teoria de Categorias

A.0.1 DEFINIÇÃO. Uma *categoria* \mathbf{C} é uma coleção de *objetos* Ob e, para cada dois objetos $A, B \in \text{Ob}$, uma coleção de *morfismos* $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ entre eles. Denotamos por $f: A \rightarrow B$ um morfismo entre A e B . Exigimos que exista uma composição $\circ: \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, C)$ para quaisquer objetos $A, B, C \in \text{Ob}$ tal que

1. a composição é associativa no sentido que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ sempre que essas composições são bem-definidas; e
2. para cada objeto $A \in \text{Ob}$, existe uma identidade $\text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A)$ tal que $\text{id}_A \circ f = f = f \circ \text{id}_B$ para qualquer morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$.

A.0.2 *Exemplo*. O diagrama abaixo representa a categoria com dois objetos e um morfismo entre eles:

$$\bullet \rightarrow \bullet.$$

As identidades foram omitidas do diagrama.

A.0.3 *Exemplo*. Definimos a categoria **Sets** com objetos dados pelos conjuntos e com morfismos dados pelas aplicações. A composição usual é associativa e para qualquer conjunto A , $\text{id}_A \circ f = f = f \circ \text{id}_B$, onde $f: A \rightarrow B$.

A.0.4 *Exemplo*. Seja \mathbf{C} uma categoria. Definimos o dual \mathbf{C}^{op} com objetos $\text{Ob}_{\mathbf{C}^{\text{op}}} := \text{Ob}_{\mathbf{C}}$ e morfismos $\text{Hom}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(A, B) := \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$. A composição no dual é dada por $g \circ_{\mathbf{C}^{\text{op}}} f := f \circ_{\mathbf{C}} g$, onde $\circ_{\mathbf{C}}$ é composição em \mathbf{C} e $\circ_{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ em \mathbf{C}^{op} .

A.0.5 *Exemplo*. Seja X um espaço topológico. Definimos a categoria \mathbf{Top}_X com objetos dados pelos abertos U de X e com morfismos dados pelas inclusões $U \subset V$ entre os abertos. As inclusões são aplicações, que tem uma composição associativa. É claro que as aplicações identidades id_U, id_V comutam com todas as inclusões $\iota: U \rightarrow V$.

A.0.6 *Exercício*. Mostre que as seguintes construções definem de fato categorias:

1. A categoria **Grp** com objetos dados pelos grupos e com morfismos dados pelos homomorfismos de grupos.
2. A categoria **Ab** com objetos dados pelos grupos abelianos e com morfismos dados pelos homomorfismos de grupos.
3. A categoria **Ring** tem os anéis como objetos e homomorfismos de anéis como morfismos.
4. Dado um anel R , definimos a categoria $R\text{-Mod}$ com objetos dados pelos R -módulos e morfismos dados pelos homomorfismos de R -módulos.

A.0.7 DEFINIÇÃO. Um *functor covariante* $\mathcal{F} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ entre duas categorias \mathbf{C} e \mathbf{D} leva objetos em \mathbf{C} para objetos em \mathbf{D} e também leva morfismos em \mathbf{C} para morfismos em \mathbf{D} . Além disso, exigimos que

1. $\mathcal{F}(g \circ h) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(h)$ para quaisquer morfismos combináveis f, g de \mathbf{C} ; e que
2. $\mathcal{F}(\text{id}_A) = \text{id}_{\mathcal{F}(A)}$ para qualquer objeto $A \in \text{Ob}_{\mathbf{C}}$.

Um *functor contravariante* $\mathcal{F} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ é um functor covariante $\mathcal{F} : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{D}$. Isso é equivalente a dizer que $\mathcal{F}(g \circ h) = \mathcal{F}(h) \circ \mathcal{F}(g)$ em vez de Item 1.

Referências Bibliográficas

- [Ahl78] L. V. Ahlfors, *Complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1978, An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics. MR 510197 (80c:30001)
- [Ati82] M. F. Atiyah, *Convexity and commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), no. 1, 1–15. MR 642416 (83e:53037)
- [CAL03] A. Cannas da Silva, M. Audin, and E. Lerman, *Symplectic geometry of integrable hamiltonian systems*, Birkhäuser, 2003.
- [Cal13] B. Callander, *Lefschetz fibrations*, Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, IMECC, 2013.
- [Can08] A. Cannas da Silva, *Lectures on symplectic geometry*, Springer, 2008.
- [GH94] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1994, Reprint of the 1978 original. MR 1288523 (95d:14001)
- [GS82] V. Guillemin and S. Sternberg, *Convexity properties of the moment mapping*, Invent. Math. **67** (1982), no. 3, 491–513. MR 664117 (83m:58037)
- [Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. MR 0463157 (57 #3116)
- [Kod05] K. Kodaira, *Complex manifolds and deformation of complex structures*, english ed., Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005, Translated from the 1981 Japanese original by Kazuo Akao. MR 2109686 (2005h:32030)
- [MS74] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974, Annals of Mathematics Studies, No. 76. MR 0440554 (55 #13428)

- [MS95] D. McDuff and D. Salamon, *Introduction to symplectic topology*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995, Oxford Science Publications. MR 1373431 (97b:58062)
- [Pra] P. Pragacz, *Characteristic classes with applications to geometry, topology and number theory*.
- [Ser56] J. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **6** (1955–1956), 1–42. MR 0082175 (18,511a)

Índice Remissivo

- anel de coordenadas, 7
- aplicação momento, 24
- cociclo de Čech, 26
- cone, 16
 - dual, 16
 - face, 16
 - geradores, 16
 - racional, 16
 - suave, 16
- conjunto algébrico, 6
- coordenada homogênea, 9
- coordenadas homogêneas, 3
- corpo de funções racionais, 8
- Delzant, 20
- espaço irredutível, 7
- espaço projetivo, 3, 9
- espaço redutível, 7
- fan, 17
 - completo, 17
 - suave, 17
 - suporte, 17
- fibrado
 - determinante, 27
 - dual, 27
 - soma de Whitney, 27
 - tensor, 27
- função
 - birracional, 8
 - racional, 8
 - regular, 7
- funções de transição, 26, 59
- hiperplano de suporte, 16
- ideal
 - homogêneo, 9
- politopo, 20
 - de Delzant, 20
 - momento, 24
 - racional, 20
 - simples, 20
 - suave, 20
- topologia de Zariski, 6
- variedade
 - afim, 7
 - projetiva, 9

Lista de Símbolos

\mathbb{A}^n O espaço afim de dimensão n .

$GL(n, \mathbb{Z})$ Matrizes inversíveis com entradas em \mathbb{Z} cujas inversas também tem entradas em \mathbb{Z}

$\mathcal{I}(X)$ O ideal correspondente ao conjunto X .

$\mathbb{k}(X)$ Aplicações racionais na variedade X .

$\mathbb{k}[X]$ As aplicações regulares na variedade X .

$\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ O anel de polinômios sobre o corpo \mathbb{k} com variáveis x_1, \dots, x_n .

S_C O semigrupo associado ao cone C

$\mathcal{V}(I)$ A variedade correspondente ao ideal I .

X_C A variedade tórica de um cone C .

$X_{\mathcal{F}}$ A variedade tórica de um fan \mathcal{F} .