Programa de Iniciação Científica (PICME)

INTRODUÇÃO ÀS VARIEDADES TÓRICAS

por

Michel Faleiros Martins

Orientadora: Profª. Drª. Elizabeth Gasparim

Definições.

1. Espaço afim n-dimensional. O conjunto das n-uplas

$$\mathbb{A}^{\mathrm{n}} = (\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$$

onde $\mathrm{x}_i \in \mathbb{K}$ para todo $1 \leq i \leq n$.

2. Variedade afim. Sejam $f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})$ polinômios no anel $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$. O conjunto

$$V(f_1, \dots, f_m) = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{A}^{\mathrm{n}} |\, f_1(\mathbf{p}) = \cdots = f_\mathrm{m}(\mathbf{p}) = 0\}$$

é a *variedade afim* definida pelas equações $f_1(\boldsymbol{p}) = 0, \dots, f_m(\boldsymbol{p}) = 0$ onde $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ denota o anel de polinômios nas n variáveis $\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$ com coeficientes no corpo $\mathbb{K}$.

Neste texto vamos considerar o domínio complexo, i.e., $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3. Conjunto algébrico afim. Seja $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ o ideal gerado pelos polinômios $f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})$ então

$$V(I) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{A}^{\mathrm{n}} \mid f_1(\mathbf{p}) = \cdots = f_\mathrm{m}(\mathbf{p}) = 0 \text{ para todo } f \in I\}$$

é o conjunto algébrico afim definido por I.

4. Ideal da variedade. Seja $V(f_1, \dots, f_m) \subset \mathbb{C}^{\mathrm{n}}$ uma variedade afim então

$$I(V) = \{f(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] \mid f(\mathbf{p}) = 0 \text{ para todo } \mathbf{p} \in V\}$$

é o ideal da variedade V.

5. Variedade irredutível. Se $X \subset \mathbb{A}^{\mathrm{n}}$ não pode ser representado como a união de duas subvariedades algébricas fechadas próprias, i.e., se para cada $X_1, X_2 \subset \mathbb{A}^{\mathrm{n}}$ com $X = X_1 \cup X_2$ implica em $X = X_1$ or $X = X_2$, então X é uma variedade irredutível.

6. Topologia de Zariski. É a topologia sobre $\mathbb{A}^{\mathrm{n}}$ cujos conjuntos fechados são os conjuntos algébricos.

7. Variedade tórica. Uma variedade irredutível que satisfaz as duas condições
(1) $(\mathbb{C}^*)^n$ é um conjunto aberto de Zariski de V;
(2) A ação de $(\mathbb{C}^*)^n$ sobre si mesmo estende-se para uma ação de $(\mathbb{C}^*)^n$ sobre V, é denominada variedade tórica.

8. Monômio de Laurent. Seja $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}]$ o anel dos polinômios de Laurent. Um monômio de Laurent é escrito como $\lambda \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{a}} = \lambda z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$ com $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$. Um monômio de Laurent estabelece uma função $\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{a}}: (\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{C}^*$.

9. Função regular. Seja $f: X \to \mathbb{K}$, onde $X \subset \mathbb{A}^n$ é uma variedade afim, tal que existe um polinômio q no anel $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ satisfazendo $f(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in X$ então f é uma função regular.

10. Aplicação regular. Quando existem funções regulares $f_1, \dots, f_m \in X$ tais que $f(\mathbf{x}) = \big(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})\big)$ para todo $\mathbf{x} \in X$, onde $f: X \to Y$ com $X, Y \subset \mathbb{A}^n$ variedades afins, temos que f é uma aplicação regular.

11. Isomorfismo. Quando uma aplicação regular $f: X \to Y$ de variedades afins possui inversa $g: Y \to X$ tal que $g \circ f = 1$ e $f \circ g = 1$, f é um dita isomorfa a g e temos um isomorfismo.

12. Cone poliédrico racional. Seja $X = \{\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_m\}$ um conjunto de vetores em $\mathbb{Z}^n$. O conjunto

$$\sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda_1 \mathrm{v}_1 + \dots + \lambda_m \mathrm{v}_\mathrm{m},\ \ \lambda_i \in \mathbb{R}^n,\ \ \lambda_i \geq 0\}$$

É um cone poliédrico. Os vetores $\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_m$ são os geradores do cone σ. Se $X = \emptyset$ então $\sigma = \{0\}$ é o cone nulo. O cone é dito fortemente convexo quando $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.

13. Cone dual poliédrico racional. Seja $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ um cone poliédrico racional fortemente convexo então o conjunto $\sigma^\vee \subset \mathbb{R}^n$ dado por

$$\sigma^\vee = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \geq 0 \ \text{ para todo } \mathbf{u} \in \sigma\,\}$$

É o cone dual poliédrico racional de n-dimensional.

Gerando variedades tóricas a partir de cones.

Considere $\phi: (\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{C}^*$ dada por

$$\phi(z_1, \dots, z_n) = (\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{p}_1}, \dots, \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{p}_n})$$

onde $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbb{Z}^n$ geram $\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n$.

Então a variedade tórica X_σ é o fecho de Zariski da imagem de ϕ que por sua vez é uma variedade tórica afim. Observe que a aplicação $\psi: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}]$ levando $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{a}} = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$ é um isomorfismo entre o grupo aditivo $\mathbb{Z}^n$ e o grupo multiplicativo dos polinômios mônicos de Laurent.

Com software **Sage-5.1** obtemos as figuras do cone e seu dual bem como a base de Hilbert que gera o cone dual.

Exemplo 1. Considere o cone $\sigma = \{e_2, 2e_1 - e_2\}$ em $\mathbb{R}^2$ mostrado na Figura 1. Seu cone dual é mostrado na Figura 2 cujo conjunto de geradores é dado pela base de Hilbert: $\{e_1, e_1 + 2e_2, e_1 + e_2\}$.

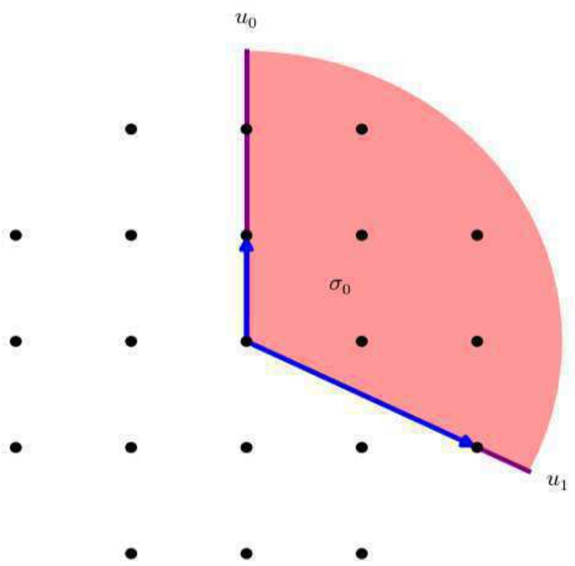

Figura 1. Cone $\sigma = \{e_2, 2e_1 - e_2\} \subset \mathbb{R}^2$.

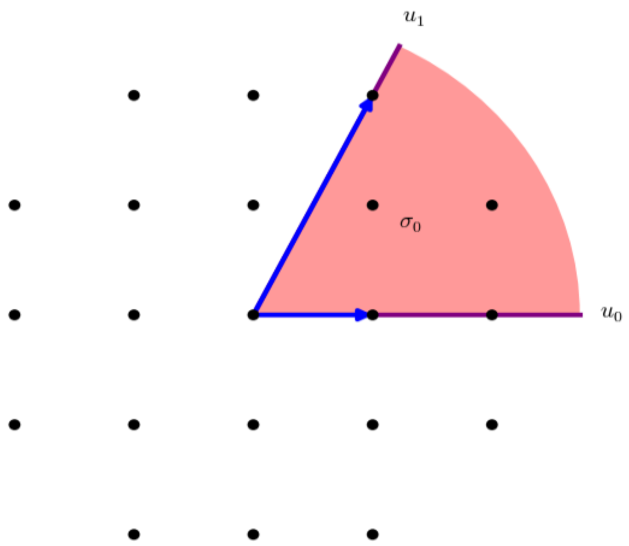

Figura 2. Cone dual $\sigma^{\vee} = \{e_1, e_1 + 2e_2, e_1 + e_2\} \subset \mathbb{R}^2$

Sabendo que os monômios mônicos de Laurent em $\mathbb{C}^2$ são isomorfos aos vetores $(v_1, v_2) \in \mathbb{Z}^2$ por meio de ψ temos que $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}) = (e_1, e_1 + 2e_2, e_1 + e_2)$ corresponde a

$$u_1 = z_1,\, u_2 = z_1 z_2 \text{ e } u_3 = z_1 z_2^2 \Longrightarrow u_1 u_3 = u_2^2$$

pois $\alpha_1 + \alpha_3 = 2\alpha_2$. A variedade tórica afim correspondente ao cone σ é, então, dada por

$$V(I_\sigma) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{C}^3 \mid \mathrm{p}_1 \mathrm{p}_3 - \mathrm{p}_2^2 = 0\,\}$$

onde $\mathbf{p} = (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3)$.

Exemplo 2. Considere o cone $\sigma = \{e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3\}$ em $\mathbb{R}^3$ mostrado na Figura 3. Seu cone dual é mostrado na Figura 4 cujo conjunto de geradores é dado pela base de Hilbert: $\{e_3, e_1, e_1 + e_2 - e_3, e_2\}$.

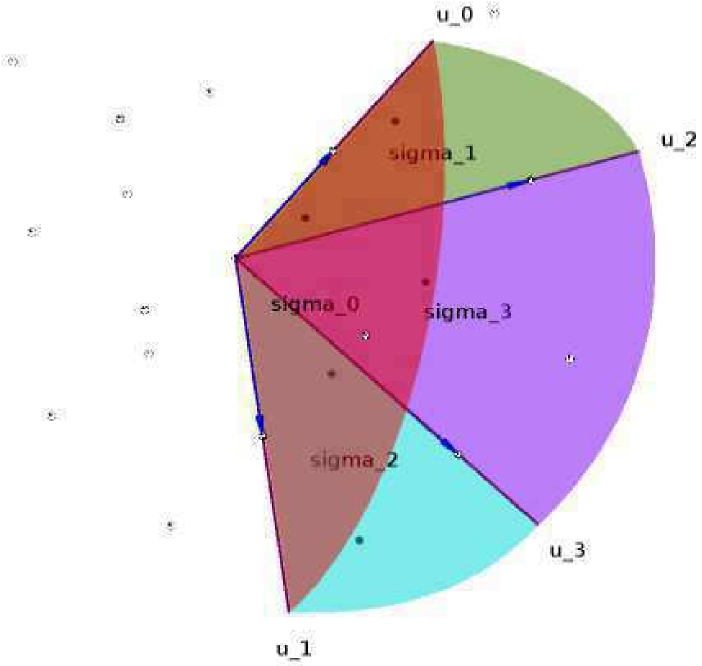

Figura 3. Cone $\sigma = \{e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3\} \subset \mathbb{R}^3$

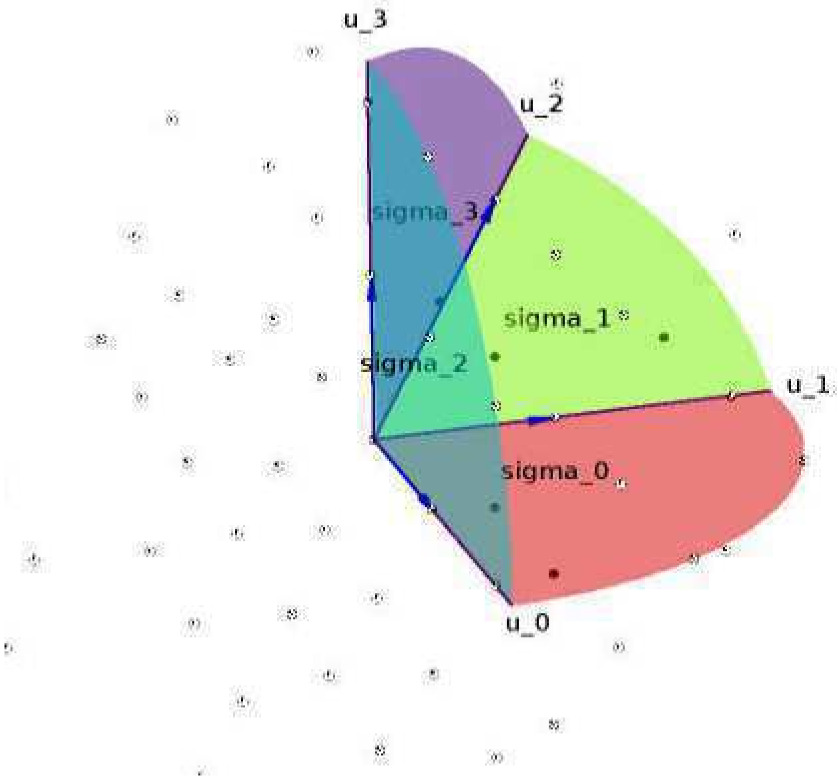

Figura 4. Cone dual $\sigma^\vee = \{e_3, e_1, e_1 + e_2 - e_3, e_2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Sabendo que os monômios mônicos de Laurent em $\mathbb{C}^3$ são isomorfos aos vetores $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{Z}^3$ por meio de ψ temos que $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}) = (e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 - e_3)$ corresponde a

$$u_1 = z_1, u_2 = z_2, u_3 = z_3, u_4 = z_1 z_2 z_3^{-1} \Longrightarrow u_4 = u_1 u_2 u_3^{-1}$$

pois $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$. A variedade tórica afim correspondente ao cone σ é, então, dada por

$$V(I_\sigma) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{C}^4 \mid \mathrm{p}_3\mathrm{p}_4 - \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 = 0\}$$

onde $\mathbf{p} = (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4)$.

Exemplo. 3 Considere o cone $\sigma = \{(0,1,0), (3,-1,-2), (1,5,0), (0,1,-7)\}$ em $\mathbb{R}^3$ mostrado na Figura 5. Seu cone dual é mostrado na Figura 6 cujo conjunto de geradores é dado pela base de Hilbert: {(0, 1, 0), (3, -1, -2), (1, 5, 0), (0, 1, -7), (0, 1, -2), (1, 0,-3), (0, 1, -6), (0, 1, -4), (0,1, -1), (0, 1, -3), (1, 0, -1),(1, 0, -2), (0, 1, -5), (2, 2, -1)}.

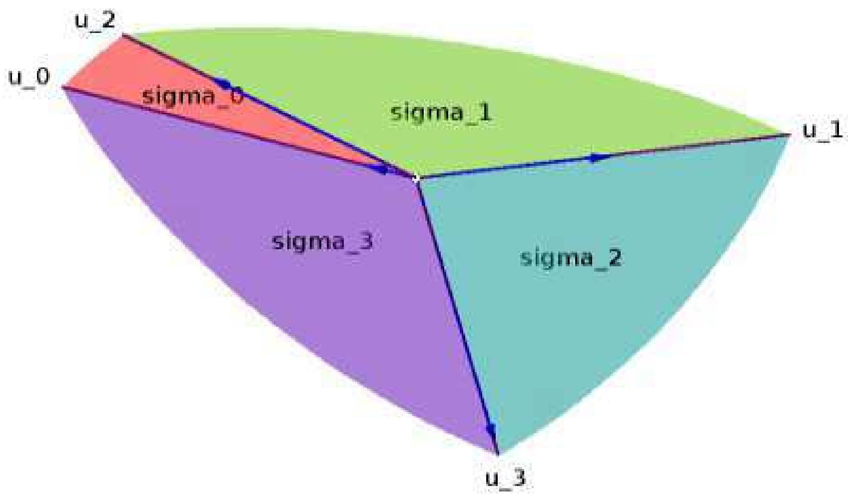

Figura 5. Cone $\sigma = \{(0,1,0), (3,-1,-2), (1,5,0), (0,1,-7)\} \subset \mathbb{R}^3$

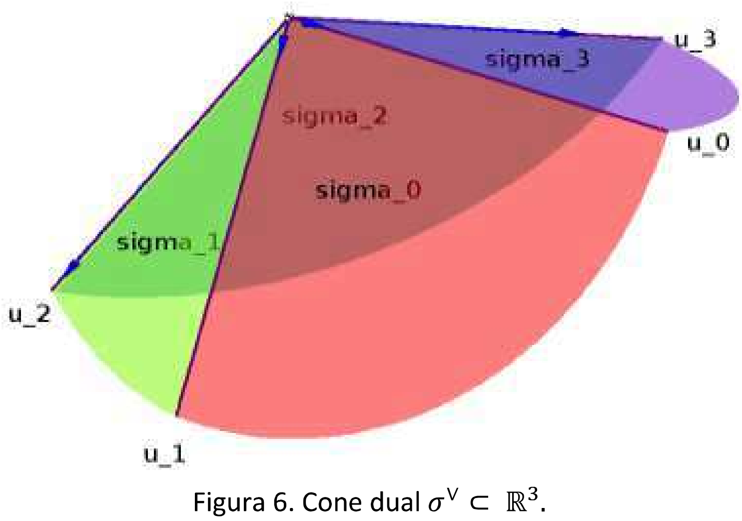

Figura 6. Cone dual $\sigma^\vee \subset \mathbb{R}^3$.

Sabendo que os monômios mônicos de Laurent em $\mathbb{C}^3$ são isomorfos aos vetores $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{Z}^3$ por meio de ψ temos que $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}, \boldsymbol{a_5}, \boldsymbol{a_6}, \boldsymbol{a_7}, \boldsymbol{a_8}, \boldsymbol{a_9}, \boldsymbol{a_{10}}, \boldsymbol{a_{11}}, \boldsymbol{a_{12}}, \boldsymbol{a_{13}}) =$ ((1, 0, 0), (0, 0, -1), (-5, 1, -8), (3, 7, 1), (-4, 1, -7), (0,1, -1), (0, 2, -1), (1, 1, 0), (-3, 1, -5), (1, 2, 0), (-2, 1, -4),(-1, 1, -2), (1, 3, 0)) corresponde a

$$u_1 = z_1,\ u_2 = z_3^{-1},\ u_3 = z_1^{-5} z_2 z_3^{-8},\ u_4 = z_1^3 z_2^7 z_3,\ u_5 = z_1^{-4} z_2 z_3^{-7}$$

$$u_6 = z_2 z_3^{-1},\ u_7 = z_2^2 z_3^{-1},\ u_8 = z_1 z_2,\ u_9 = z_1^{-3} z_2 z_3^{-5},\ u_{10} = z_1 z_2^2$$

$$u_{11} = z_1^{-2} z_2 z_3^{-4},\ \ u_{12} = z_1^{-1} z_2 z_3^{-2},\ \ u_{13} = z_1 z_2^3$$

Se fizermos Det[$\{\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_j}, \boldsymbol{a_k}\}$], $1 \leq i < j < k \leq 13$, obtemos 27 determinantes nulos, o que significa que temos 27 combinações lineares três a três entre os vetores $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_{13}}$ sobre os inteiros. Dessas, apenas 12 são independentes:

$$(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_8}, \boldsymbol{a_{10}}), (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_8}, \boldsymbol{a_{13}}), (\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_6}, \boldsymbol{a_7}), (\boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}, \boldsymbol{a_7}), (\boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}, \boldsymbol{a_9}), (\boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}, \boldsymbol{a_{12}})$$

$$(\boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}, \boldsymbol{a_{13}}), (\boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_8}, \boldsymbol{a_{11}}), (\boldsymbol{a_5}, \boldsymbol{a_6}, \boldsymbol{a_{11}}), (\boldsymbol{a_6}, \boldsymbol{a_8}, \boldsymbol{a_{12}}), (\boldsymbol{a_7}, \boldsymbol{a_9}, \boldsymbol{a_{12}}), (\boldsymbol{a_7}, \boldsymbol{a_9}, \boldsymbol{a_{13}})$$

Temos:

$$z_1 = u_1, z_3 = u_2^{-1}, z_2 = u_3 u_1^5 u_2^{-8}$$

$$\Rightarrow u_4 = u_1^3 u_2^{-1} \left(u_3 u_1^5 u_2^{-8}\right)^7 = u_1^{38} u_2^{-57} u_3^7$$

$$\vdots$$

A variedade tórica afim correspondente ao cone σ é, então, dada por

$$V(I_\sigma) = \left\{\mathbf{p} \in \mathbb{C}^{13}\ |\mathrm{p}_4 \mathrm{p}_2^{57} - \mathrm{p}_1^{38} \mathrm{p}_3^7 = 0\ \ \wedge\ \text{outras 9 equações polinomiais}\ \right\}$$

onde $\mathbf{p} = (\mathrm{p}_1, \dots, \mathrm{p}_{13})$.