Maringá, Janeiro de 2015

MINICURSO DE VERÃO UEM 2015

ELIZABETH GASPARIM

Sumário

1. Objetivos e metodologia

Estas são notas de aula para um minicurso de verão cujos objetivos são: chegar de maneira rápida a temas atuais de pesquisa e discutir problemas em aberto. O título proposto para o minicurso foi

Aplicações da teoria de Lie à Geometria Simplética.

As aplicações que quero apresentar apareceram recentemente em trabalhos conjuntos com os professores Luiz A. B. San Martin e Lino Grama da Unicamp [GGS1], [GGS2], e também com meu aluno de doutorado Brian Callander [C], [CG]. Uma versão resumida destes resultados está em [CGGS].

Vou apresentar o curso no formato de trabalho de um pesquisador. A pesquisa científica muitas vezes acontece assim: primeiro encontramos um resultado motivador que nos deixa curioso, e então saímos procurando como entender detalhes, buscamos definições, estudamos teorias básicas, lemos alguns livros, páginas da wikipédia, perguntamos a amigos, etc; seja lá o que for que nos ajude a compreender o texto. Cada vez que compreendemos mais uma parte da teoria, voltamos a reler o resultado que nos interessa, e assim avançamos até entender os detalhes. Proponho estudarmos o seguinte resultado motivador:

$\star$ **Teorema** [GGS1] Seja $\mathfrak{h}$ a subálgebra de Cartan de uma álgebra de Lie complexa semissimples. Sejam dados $H_0 \in \mathfrak{h}$ e $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ com H um elemento regular. A *função altura* $f_H \colon \mathcal{O}(H_0) \to \mathbb{C}$ definida por

$$f_H(x) = \langle H, x \rangle \qquad x \in \mathcal{O}(H_0)$$

tem um número finito ($= |\mathcal{W}|/|\mathcal{W}_{H_0}|$) de singularidades isoladas e dá a $\mathcal{O}(H_0)$ uma estrutura de fibração de Lefschetz simplética.

Uma das razões pelas quais este resultado é interessante é que ele combina duas áreas distintas da matemática que a priori não parecem estar relacionadas – a teoria de Lie e a geometria simplética.

Quero aproveitar os exemplos dados por este teorema para ilustrar conceitos de topologia algébrica básica de maneira nova. Se lemos sobre homologia, homotopia, ou cohomologia, os livros textos sempre dão os mesmos exemplos: $\mathbb{R}^n$, esferas S^n, espaços projetivos reais $\mathbb{RP}^n$, espaços projetivos complexos $\mathbb{CP}^n$ e superfícies de Riemann. Ficamos com a impressão errada de que estas teorias terminaram no século passado, e não é óbvio como conectar estes temas com algo atual. Aplicando este teorema às órbitas adjuntas de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ e $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ vou apresentar exemplos novos onde estes conceitos de topologia algébrica fazem conexão com problemas abertos de matemática atual de ponta relacionada com a famosa Conjectura Homológica da Simetria Espelho de Kontsevich. Ou seja, quero tentar fazer um atalho no qual se vai rapidamente de topologia básica para conjecturas famosas.

Vou passar a maior parte do tempo explicando conceitos básicos de topologia e geometria, e pretendo dar muitos exemplos. Na última aula quero escrever alguns diamantes de Hodge e mostrar como podemos calcular tais diamantes diretamente no computador usando conceitos simples de geometria algébrica.

2. Homotopias e fibrações

Relendo nosso teorema $\star$ vemos que a conclusão é de que certos espaços tem estrutura de fibrações de Lefschetz. Claramente a conclusão é a parte mais importante do resultado, portanto a primeira coisa que o pesquisador vai estudar. Logo, nosso primeiro objetivo é o de enteder o que é uma fibração de Lefschetz. A propriedade mais importante de uma fibração é que ela satisfaz a propriedade do levantamento de homotopias. Seja $I = [0, 1]$ com a topologia usual induzida da reta.

Definição 2.1. *Sejam E e B espaços topológicos. Uma* **fibração** *sobre B é uma sobrejeção contínua $p \colon E \to B$ tal que para cada homotopia*

$H\colon X \times I \to B$ existe uma homotopia $\tilde{H}\colon X \times I \to E$ satisfazendo $p \circ \tilde{H} = H$. Dizemos que $\tilde{H}$ levanta H, e E chama-se o espaço total da fibração.

Agora precisamos definir homotopia. Além disto, em seguida vamos necessitar o conceito de grupo fundamental para definir a representação de isotropia da fibração.

Definição 2.2. *Sejam $f, g\colon X \to Y$ duas aplicações contínuas. Uma* **homotopia** *entre f e g é uma aplicação contínua $H\colon X \times I \to Y$ tal que $H(t, 0) = f(t)$ e $H(t, 1) = g(t)$. Dizemos que f e g são homotópicas e denotamos isto por $f \sim g$.*

Definição 2.3. *Um espaço topológico X é* **contrátil** *se a aplicação identidade em X é homotópica a uma aplicação constante.*

Exemplo 2.4. *O espaço $\mathbb{R}^n$ é contrátil.*

Definição 2.5. *Dizemos que dois espaços topológicos X e Y são* **homotopicamente equivalentes** *se existem aplicações $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ tais que $g \circ f \sim id_X$ e $f \circ g \sim id_Y$.*

Exemplo 2.6. *Todo espaço contrátil é homotopicamente equivalente a um ponto.*

Exemplo 2.7. *O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ sem a origem, $\mathbb{R}^n - \{0\}$, é homotopicamente equivalente à esfera S^{n-1}.*

3. Teorema da bola cabeluda

Dada uma aplicação diferenciável $f\colon M \to N$ e um ponto regular x de f definimos o sinal em x como

$$sg(x) = \begin{cases} +1 & se \quad det(Jac(df(x))) > 0 \\ -1 & se \quad det(Jac(df(x))) < 0 \end{cases}.$$

Definição 3.1. *Seja y um valor regular de f, que sabemos existe pelo teorema de Sard. O* **grau** *de f é o inteiro $deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sg(x)$.*

Exemplo 3.2. *A aplicação identidade tem grau 1.*

Exemplo 3.3. *A aplicação antípoda $p \mapsto -p$ na esfera S^n tem grau $(-1)^{n+1}$.*

Observação 3.4. *Um fato básico é que aplicações homotópicas tem o mesmo grau. Portanto nas esferas S^n com n par, a aplicação antípoda não é homotópica à identidade.*

Veremos outra definição de grau, que vale em maior generalidade para quaisquer aplicações contínuas. Para o caso especial de aplicações entre esferas vale também a conversa. De fato:

Teorema de Hopf: Sejam $f, g \colon S^n \to S^n$ aplicações contínuas. Então $f \sim g$ se e somente se $deg(f) = deg(g)$.

Vamos assumir este teorema sem demonstração, e usá-lo para provar o teorema da bola cabeluda, segundo o qual não se pode pentear os cabelos de uma esfera cabeluda sem deixar redemoinhos.

Teorema Todo campo diferenciável de vetores tangentes à esfera S^{2n} tem ao menos um zero.

Demonstração. Suponhamos que σ é um campo de vetores tangentes na esfera S^{2n} sem zeros. Uma homotopia entre a aplicação identidade e a antípoda é obtida movendo cada $x \in S^{2n}$ ao longo da geodésica (círculo máximo) na direção de $\sigma(x)$ até chegar a $-x$. Mas isto contradiz a observação 3.4. □

Uma maneira menos deselegante de descrever esta aplicação é a afirmação de que a todo momento existe sempre um local na terra onde o vento não sopra.

4. Fibrações de Lefschetz

A definição clássica de fibrações, dada em 2.1, diz que elas são sobrejeções contínuas que satisfazem a propriedade do levantamento de homotopias.

Exemplo 4.1. *O tipo mais simples de fibração ocorre quando todas as fibras são difeomorfas. Mais ainda, temos o caso onde a fibração $p \colon E \to B$ é localmente um produto. Seja $F = p^{-1}(b)$ a fibra sobre um ponto $b \in B$ e suponhamos que B seja conexo. A condição de ser uma fibração* **localmente trivial** *significa que cada ponto $x \in B$ tem uma vizinhança aberta U_x tal que $p^{-1}(U_x) \simeq U_x \times F$. Neste caso chamamos E de um* **fibrado** *sobre B com fibra F.*

Uma das vantagens de considerarmos uma fibração $p \colon E \to B$ é que o espaço total E da fibração fica descrito como uma coleção de espaços de dimensão menor, as fibras $p^{-1}(x)$ com $x \in B$. Naturalmente o primeiro caso a considerar é quando B tem dimensão 1. No caso que nos interessa, o de variedades complexas, pedimos então que seja $B = \mathbb{P}^1$ no caso compacto, ou $B = \mathbb{C}$ no caso aberto, e gostaríamos que as fibras fossem subvariedades lisas de E. O problema com esta escolha é que tal tipo de fibração quase nunca acontece. O próximo passo é admitir que as fibras possuam singularidades. Resulta, de modo surpreendente, que permitindo apenas o tipo mais simples de singularidades já se abrange uma boa maioria de casos.

Definição 4.2. *Seja $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ uma aplicação diferenciável, dizemos que f tem* **singularidade** *no ponto a se todas as derivadas parciais de f se anulam em a, ou seja*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \qquad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Dizemos que a singularidade é **não degenerada** *se o determinante do Hessiano de f não se anula em a, ou seja*

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right) \neq 0.$$

No caso real, o famoso lema de Morse diz que existe uma escolha de coordenadas tal que ao redor da singularidade não degenerada a função se escreve na forma

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(a) + x_1^2 + \dots + x_i^2 - x_{i+1}^2 - \dots - x_n^2.$$

Como no caso complexo pode-se mudar x_j por $\sqrt{-1}x_j$, podemos escolher todos os sinais como positivos.

Definição 4.3. *Seja X uma variedade complexa compacta de dimensão n com uma aplicação sobrejetiva diferenciável $f\colon X \to \mathbb{P}^1$. Dizemos que f é uma* **fibração de Lefschetz topológica** *(FLT) se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *A diferencial df é sobrejetiva fora de um conjunto finito de pontos $\{Q_1, \dots, Q_\mu\} \subset X$.*
2. *Sempre que $p \in \mathbb{P}^1 \setminus \{f(Q_1), \dots, f(Q_\mu)\}$, as fibras $f^{-1}(p)$ são variedades complexas lisas homeomorfas entre si.*
3. *Para cada i existem pequenos discos $Q_i \subset U_{Q_i}$ e coordenadas $(x_0, \dots, x_n) \in U_{Q_i}$ tais que $f(x_0, \dots, x_n) = f(Q_i) + x_0^2 + \dots + x_n^2$.*
4. *f restrita às fibras regulares é localmente trivial.*

Exemplo 4.4. *Donaldson* [Do] *mostrou que após blow-up em um número finito de pontos toda variedade simplética de dimensão real 4 admite uma estrutura de fibração de Lefschetz.*

Observação 4.5. *Note que permitir blow-ups em alguns pontos é uma condição necessária em 4.4, por exemplo, não existe fibração $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$. Uma maneira de provar isto é usando a característica de Euler, o que veremos na próxima seção.*

Nosso resultado $\star$ dá exemplos de fibrações de Lefschetz em dimensões maiores do que 4, nos quais o espaço total da fibração é uma órbita adjunta. Dentro destas fibrações vamos querer procurar ciclos evanescentes, que vivem na homologia média da fibra regular, mas morrem na homologia da fibra singular.

5. Homologia

Existem muitos tipos de homologia: simplicial, singular, celular, a suporte compacto, cíclica, de Borel–Moore, de grupos, de álgebras, de Hochschild, de feixes, de Floer, de interseção, de Morse, de Steenrod, persistente, étale, etc. Cada vez escolhemos aquela que for mais adequada ao problema que precisamos tratar. Fica a pergunta geral: quando uma teoria pode ser chamada de homologia? Resposta: quando ela satisfaz os axiomas de Eilenberg–Steenrod, ver [Sp].

Axiomas de Eilenberg–Steenrod: Uma teoria de homologia (H, ∂) consiste de:

- Um funtor covariante da categoria de pares de espaços topológicos e aplicações para a categoria de grupos e homomorfismos de grau 0, isto é, $(X, A) \to \{H_q(X, A)\}$.
- Uma transformação natural de grau -1 do funtor H em (X, A) para o funtor H em $(A, \emptyset)$, isto é, $\partial_q\colon H_q(X, A) \to H_{q-1}(A, \emptyset)$.

Tais que os seguintes axiomas sejam satisfeitos:

(1) **Axioma de homotopia** Se $f_0, f_1\colon (X, A) \to (Y, B)$ são homotópicas, então $H(f_0) = H(f_1)\colon H(X, A) \to H(Y, B)$.

(2) **Axioma de exatitude** Para cada par (X, A) com inclusões $i\colon A \subset X$ e $j \subset (X, A)$ existe uma sequência exata

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{q+1}(X,A)} H_q(A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial_q(X,A)} H_{q-1}(A) \xrightarrow{H_{q-1}(i)} \cdots .$$

(3) **Axioma de excisão** Para cada par (X, A), se U é um subconjunto aberto em X tal que $\overline{U} \subset int(A)$, então a aplicação de excisão $j\colon (X \setminus U, A \setminus U) \subset (X, A)$ induz um isomorfismo $H(j)\colon H(X \setminus U, A \setminus U) \simeq (X, A)$.

(4) **Axioma de dimensão** Se P é um espaço com um ponto, então

$$H_q(P) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & se \quad q = 0 \\ 0 & se \quad q \neq 0. \end{cases}$$

Uma das consequências mais importantes destes axiomas é o teorema de Mayer–Vietoris.

Teorema (Mayer–Vietoris) Se $X = A \cup B$ com A e B abertos em X, a sequência longa de Mayer–Vietoris dá $H_*(X)$ em termos de $H_*(A)$ e $H_*(B)$. A seguinte sequência longa é exata:

$$\cdots \to H_q(A \cap B) \to H_q(A) \oplus H_q(B) \to H_q(X) \to H_{q-1}(A \cap B) \to \cdots.$$

Exemplo 5.1. *Homologia das esferas.*

$$H_q(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{se} \quad q = 0, n \\ 0 & \textit{caso} \quad \textit{contrário}. \end{cases}$$

Referências

[C] Callander, B. ; *Lefschetz Fibrations*, Master's Thesis, Universidade Estadual de Campinas (2013).

[CG] Callander, B. ; Gasparim, E. ; *Hodge diamonds and adjoint orbits*, arXiv:1311.1265.

[CGGS] Callander, B. ; Gasparim, E ; Grama, L ; San Martin, L. A. B. ; *Symplectic Lefschetz fibrations from a Lie theoretical viewpoint*, preprint.

[Do] Donaldson, S. K .; *Lefschetz fibrations in symplectic geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998), Doc. Math. Extra Vol. II (1998), 309–314.

[GGS1] Gasparim, E ; Grama, L ; San Martin, L. A. B. ; *Lefschetz fibrations on adjoint orbits*, arXiv:1309.4418.

[GGS2] Gasparim, E ; Grama, L ; San Martin, L. A. B. ; *Adjoint orbits of semisimple Lie groups and Lagrangian submanifolds*, arXiv:1401.2418.

[Sp] Spanier, E.; *Algebraic Topology*, Springer–Verlag, 1966.